

А. Г. Мордкович, Н. В. Семенов

Алгебра

и начала математического анализа

11 класс
(ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ)

**Методическое
пособие
для учителя**



Москва 2010

Предисловие

Издательство «Мнемозина» подготовило учебно-методический комплект для изучения в 11 классе профильной старшей школы курса алгебры и начал математического анализа, состоящий из следующих книг:

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Задачник / Под ред. А. Г. Мордковича;

В. И. Глизбург. Алгебра и начала математического анализа. Контрольные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

Цель данной книги — оказать методическую помощь учителям, работающим по указанным выше учебнику и задачнику.

В пособии содержатся примерное планирование учебного материала 11 класса, причем в трех вариантах — из расчета 4, 5 и 6 часов в неделю, а также решения (или указания к решению) большинства задач повышенной сложности, которые в указанном выше задачнике, отмечены значком *. В некоторых случаях эти решения предваряются комментариями к соответствующим главам учебника.

Данный комплект (учебник, задачник, пособие для учителя, контрольные работы) является непосредственным продолжением аналогичного комплекта для изучения курса алгебры и начал математического анализа в 10 классе профильной старшей школы, опубликованного ранее.

Авторы

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М79

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень) : методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — М. Мнемозина, 2010. — 191 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01401-0

В пособие представлены: примерное тематическое планирование учебного материала в 11 классе (в трех вариантах); методические рекомендации по работе с учебником А. Г. Мордковича, П. В. Семенова «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс»; решения наиболее трудных задач из одноименного задачника.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Учебное издание

**Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович**

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**11 класс
(профильный уровень)**

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Генеральный директор издательства М. И. Безвизонная

Главный редактор К. И. Куровский

Редактор С. В. Бахтина

Оформление и художественное редактирование: Т. С. Богданова

Технический редактор И. Л. Ткаченко

Корректоры Л. В. Дьячкова, И. Н. Баханова

Компьютерная верстка и графика: Т. В. Ватракова

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.

Формат 60×90^{1/16}. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».

Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 866

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.

Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.

E-mail: icc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»

(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.

Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.

E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).

Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

**Отпечатано с готовых файлов заказчика в ОАО «ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14**

© «Мнемозина», 2010

© Оформление. «Мнемозина», 2010

Все права защищены

ISBN 978-5-346-01401-0

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

I вариант — 4 ч в неделю, II вариант — 5 ч в неделю,

III вариант — 6 ч в неделю

Изучаемый материал	Кол-во часов		
	Вариант		
	I	II	III
Повторение материала 10-го класса	4	5	6
Глава 1. Многочлены			
§ 1. Многочлены от одной переменной	3	4	5
§ 2. Многочлены от нескольких переменных	3	4	5
§ 3. Уравнения высших степеней	3	4	5
Контрольная работа № 1	1	2	2
Итого:	10	14	17
Глава 2. Степени и корни. Степенные функции			
§ 4. Понятие корня n -й степени из действительного числа	2	2	2
§ 5. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики	3	4	5
§ 6. Свойства корня n -й степени	3	4	4
§ 7. Преобразование выражений, содержащих радикалы	4	5	6
Контрольная работа № 2	2	2	2
§ 8. Понятие степени с любым рациональным показателем	3	4	4
§ 9. Степенные функции, их свойства и графики	4	5	6
§ 10. Извлечение корней из комплексных чисел	2	3	4
Контрольная работа № 3	1	2	2
Итого:	24	31	35
Глава 3. Показательная и логарифмическая функции			
§ 11. Показательная функция, ее свойства и график	3	4	4
§ 12. Показательные уравнения	3	4	5
§ 13. Показательные неравенства	2	3	4
§ 14. Понятие логарифма	2	2	2
§ 15. Логарифмическая функция, ее свойства и график	3	3	4
Контрольная работа № 4	2	2	2
§ 16. Свойства логарифмов	4	5	6
§ 17. Логарифмические уравнения	4	5	6

Изучаемый материал	Кол-во часов		
	Вариант		
	I	II	III
§ 18. Логарифмические неравенства	3	4	5
§ 19. Дифференцирование показательной и логарифмической функций	3	4	5
<i>Контрольная работа № 5</i>	2	2	2
Итого:	31	38	45
Глава 4. Первообразная и интеграл			
§ 20. Первообразная и неопределенный интеграл	3	4	4
§ 21. Определенный интеграл	5	6	7
<i>Контрольная работа № 6</i>	1	1	2
Итого:	9	11	13
Глава 5. Элементы теории вероятностей и математической статистики			
§ 22. Вероятность и геометрия	2	2	3
§ 23. Независимые повторения испытаний с двумя исходами	3	4	4
§ 24. Статистические методы обработки информации	2	3	3
§ 25. Гауссова кривая. Закон больших чисел	2	2	3
Итого:	9	11	13
Глава 6. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств			
§ 26. Равносильность уравнений	4	4	4
§ 27. Общие методы решения уравнений	3	4	4
§ 28. Равносильность неравенств	3	3	4
§ 29. Уравнения и неравенства с модулями	3	4	5
<i>Контрольная работа № 7</i>	2	2	2
§ 30. Уравнения и неравенства со знаком радикала	3	4	5
§ 31. Уравнения и неравенства с двумя переменными	2	3	4
§ 32. Доказательство неравенств	3	4	5
§ 33. Системы уравнений	4	5	6
<i>Контрольная работа № 8</i>	2	2	2
§ 34. Задачи с параметрами	4	5	7
Итого:	33	40	48
<i>Обобщающее повторение</i>	16	20	27
Всего:	136	170	204

ГЛАВА 1. Многочлены

§ 1. Многочлены от одной переменной

1.13. Определить степень (n), старший коэффициент (a) и свободный член (c) многочлена $p(x)$:

б) $p(x) = (x^6 - 2x + 64)^3 - (x^2 + x^5 - 512)^2$;

в) $p(x) = (81x^4 - 36x^2 + 4)^5 - (9x^2 - 2)^{10} + (x - 1)^{13}$.

Решение. б) Степень многочлена равна 17, старший член при этом выглядит так: $-2x^6x^3$ (члены x^{18} и $-x^{18}$ взаимно уничтожаются).

Итак, $n = 17$, $a = -2$. Далее, $c = 64^3 - 512^2 = 2^{18} - 2^{18} = 0$.

в) Так как $(81x^4 - 36x^2 + 4)^5 = (9x^2 - 2)^{10}$, то $p(x) = (x - 1)^{13}$, откуда сразу следует, что $n = 13$, $a = 1$, $c = -1$.

1.20. Пусть $p(x)$ — многочлен степени k и при всех значениях x справедливо равенство $p(-x) = p(x)$. Доказать, что:

а) k — четное натуральное число или нуль;

б) коэффициенты многочлена $p(x)$ при нечетных степенях x равны нулю.

Решение. Пусть $p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k$. Тогда $p(-x) = (-1)^ka_0x^k + (-1)^{k-1}a_1x^{k-1} + \dots + (-1)a_{k-1}x + a_k$.

Тождество $p(x) = p(-x)$ по теореме о тождественности двух многочленов (см. § 1 учебника) выполняется тогда и только тогда, когда равны степени многочленов и равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Ясно, что если $k = 0$, то $p(x) = a_k$ и $p(-x) = a_k$, т. е. $p(-x) = p(x)$.

Рассмотрим общий случай, когда k — натуральное число. Если k — нечетное число, то $p(-x) = -a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + (-1)a_{k-1}x + a_k$, причем $a_0 \neq 0$. В этом случае равенство старших коэффициентов многочленов $p(x)$ и $p(-x)$, т. е. $a_0 = -a_0$ выполняться не может, а потому и многочлены $p(x)$ и $p(-x)$ не тождественны.

Если k — четное число, то

$$p(-x) = a_0x^k - a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} - a_3x^{k-3} + \dots - a_{k-1}x + a_k.$$

Чтобы выполнялось тождество $p(x) = p(-x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $a_1 = -a_1$, $a_3 = -a_3$, $a_{k-1} = -a_{k-1}$, что возможно лишь в случае, когда $a_1 = a_3 = \dots = a_{k-1} = 0$. Это значит, что коэффициенты многочлена $p(x)$ при нечетных степенях x равны нулю.

1.35. Найти значения параметра a , при которых многочлен имеет ровно три различных корня:

б) $(ax^2 + 5x + 1)(x^2 - x - 2)$;

в) $(x^2 - (a + 1)x + a)(x^2 - x - a)$.

Решение. б) Из уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ находим: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Три различных корня заданный многочлен может иметь в следующих случаях:

1) когда $a = 0$ — в этом случае выражение $ax^2 + 5x + 1$ обращается в многочлен первой степени $5x + 1$ с корнем $-\frac{1}{5}$;

2) когда дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + 5x + 1$ равен нулю — это будет при $a = 6\frac{1}{4}$, а корень квадратного трехчлена при этом равен $-\frac{2}{5}$;

3) когда одно из чисел $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ является корнем квадратного трехчлена $ax^2 + 5x + 1$, а другое — нет. Если число 2 является корнем указанного трехчлена, то $a \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 = 0$, т. е. $a = -\frac{11}{4}$. Если число -1 является корнем указанного трехчлена, то $a \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 1 = 0$, т. е. $a = 4$.

Итак, три корня заданный многочлен имеет при $a = 0, 4, -2\frac{3}{4}, 6\frac{1}{4}$.

в) Из уравнения $x^2 - (a + 1)x + a = 0$ находим $x_1 = a$, $x_2 = 1$. Три корня заданный многочлен может иметь:

1) когда $a = 1$ — в этом случае трехчлен $x^2 - x - a$ обращается в $x^2 - x - 1$ с двумя иррациональными корнями, которые вместе с кратным корнем 1 и составят тройку различных корней заданного многочлена;

2) когда дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - x - a$ равен нулю — это будет при $a = -\frac{1}{4}$, а корень квадратного трехчлена при этом равен $\frac{1}{2}$; тройка корней многочлена при этом значении параметра a выглядит так: $-\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}$;

3) когда одно из чисел $x_1 = a$, $x_2 = 1$ является корнем квадратного трехчлена $x^2 - x - a$, а другое — нет. Если число a является корнем указанного трехчлена, то $a^2 - a - a = 0$, т. е. $a = 0$ или $a = 2$. Но при $a = 0$ первый и второй квадратные трехчлены тождественны, значит, заданный многочлен — произведение этих трехчленов — имеет два корня (два кратных корня), что нас не устраивает. При $a = 2$ первый трехчлен имеет корни 2, 1, а второй — корни 2, -1 ; итого три различных корня, что нас устраивает.

Осталось рассмотреть случай, когда число 1 является корнем второго квадратного трехчлена. Это будет при $a = 0$. Этот случай нам уже встретился выше, мы его отвергли.

Итак, три корня заданный многочлен имеет при $a = 1, 2, -\frac{1}{4}$.

1.36. 6) При каких значениях параметра a многочлен

$$(x^2 - (3a - 2)x - 6a)(x^2 - (5a + 3)x + a)(x - 2)$$

имеет кратные корни?

Решение. Трехчлен $x^2 - (3a - 2)x - 6a$ имеет корни $x_1 = 3a$, $x_2 = -2$, двучлен $x - 2$ обращается в нуль при $x_3 = 2$. Значит, два варианта кратных корней будут при $3a = -2$, т. е. при $a = -\frac{2}{3}$, и при $3a = 2$, т. е. при $a = \frac{2}{3}$.

Теперь займемся вторым квадратным трехчленом: $x^2 - (5a + 3)x + a$. Составим его дискриминант: $D = (5a + 3)^2 - 4a = 25a^2 + 26a + 9$. Этот трехчлен, в свою очередь, имеет отрицательный дискриминант, значит, он положителен при любых значениях a , а потому рассматриваемый квадратный трехчлен всегда имеет два различных действительных корня. Они будут кратными для заданного многочлена, если совпадают с одним из отмеченных ранее трех корней. Это будет в том случае, когда тот или иной из найденных выше трех корней является корнем второго квадратного трехчлена.

Пусть $3a$ — корень квадратного трехчлена $x^2 - (5a + 3)x + a$.

Тогда $9a^2 - 3a(5a + 3) + a = 0$, откуда находим: $a = 0$, $a = -\frac{4}{3}$.

Пусть -2 — корень квадратного трехчлена $x^2 - (5a + 3)x + a$.

Тогда $(-2)^2 + 2(5a + 3) + a = 0$, откуда находим: $a = -\frac{10}{11}$.

Пусть 2 — корень квадратного трехчлена $x^2 - (5a + 3)x + a$.

Тогда $2^2 - 2(5a + 3) + a = 0$, откуда находим: $a = -\frac{2}{9}$.

Итак, получили шесть значений параметра a , при которых заданный многочлен имеет кратные корни: $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{10}{11}, -\frac{4}{3}, 0$.

1.47. При каких значениях b и c многочлен

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + bx^2 + cx + 1$$

имеет два корня, каждый из которых второй кратности?

Решение. По условию многочлен имеет корни x_1, x_1, x_2, x_2 . Значит,

$$x^4 + 8x^3 + bx^2 + cx + 1 = (x - x_1)^2(x - x_2)^2,$$

т. е. $x^4 + 8x^3 + bx^2 + cx + 1 = x^4 - 2(x_1 + x_2)x^3 +$

$$+ (x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)x^2 - 2(x_1x_2^2 + x_1^2x_2)x + x_1^2x_2^2.$$

По теореме о тождественности двух многочленов заключаем, что необходимо выполнение двух соотношений: $-2(x_1 + x_2) = 8$ и $x_1^2 x_2^2 = 1$, т. е. $x_1 + x_2 = -4$, а $x_1 x_2 = 1$ или $x_1 x_2 = -1$.

В первом случае получаем:

$$b = x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 = 18,$$

$$c = -2(x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2) = -2x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8.$$

Во втором случае, рассуждая аналогично, находим, что $b = 14$, $c = -8$.

Ответ: $b = 18$, $c = 8$ или $b = 14$, $c = -8$.

1.48. При каких целых значениях a , b и c многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ имеет целый корень кратности 3? Для каждой тройки таких значений a , b и c найти корни многочлена $f(x)$.

Решение. Целыми корнями данного многочлена могут быть только числа 1, 2, -1, -2. Значит, возможны четыре варианта разложения многочлена на множители: $f(x) = (x - 1)^3(x - m)$, $f(x) = (x + 1)^3(x - p)$, $f(x) = (x - 2)^3(x - n)$, $f(x) = (x + 2)^3(x - k)$.

Поскольку свободный член многочлена равен 2, то соответственно получаем $m = 2$, $p = -2$, $n = \frac{1}{4}$, $k = -\frac{1}{4}$. Последние два случая невозможны, поскольку приведенный многочлен с целочисленными коэффициентами не может иметь дробных корней. Значит, либо $f(x) = (x - 1)^3(x - 2)$, либо $f(x) = (x + 1)^3(x + 2)$. Тогда из тождества $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2 = (x - 1)^3(x - 2)$ находим, что $a = -5$, $b = 9$, $c = -7$, а из тождества $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2 = (x + 1)^3(x + 2)$ находим, что $a = 5$, $b = 9$, $c = 7$.

1.49. Докажите, что все корни многочлена $g(x)$ являются корнями многочлена $f(x)$.

Указание. При некоторой нестандартности формулировки задача является достаточно простой: она сводится к установлению того факта, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$.

§ 2. Многочлены от нескольких переменных

2.5. Разложить на множители многочлен:

а) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

г) $(x + y + z)^4 - (y + z)^4 - (z + x)^4 - (x + y)^4 + x^4 + y^4 + z^4$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= ((x + y + z)^3 - x^3) - (y^3 + z^3) = \\ &= (y + z)((x + y + z)^2 + x(x + y + z) + x^2) - (y + z)(y^2 - yz + z^2) = \\ &= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz) = 3(x + y)(x + z)(y + z). \end{aligned}$$

г) Обозначим данный многочлен буквой P . Рассмотрим его без первого слагаемого, т. е. рассмотрим выражение

$$P_1 = (x^4 - (y + z)^4) + (y^4 - (x + z)^4) + (z^4 - (x + y)^4).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x - y - z)(x + y + z)(x^2 + (y + z)^2) + \\ &+ (y - x - z)(y + x + z)(y^2 + (x + z)^2) + \\ &+ (z - x - y)(z + x + y)(z^2 + (x + y)^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } P &= (x + y + z)^4 + P_1 = (x + y + z)((x + y + z)^3 + \\ &+ (x - y - z)(x^2 + (y + z)^2) + (y - x - z)(y^2 + (x + z)^2) + \\ &+ (z - x - y)(z^2 + (x + y)^2)). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим многочлен P без первого множителя, т. е. рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} P_2 &= (x + y + z)^3 + (x - y - z)(x^2 + (y + z)^2) + \\ &+ (y - x - z)(y^2 + (x + z)^2) + (z - x - y)(z^2 + (x + y)^2). \end{aligned}$$

После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} ((x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3) + 6xyz - 3(xy^2 + x^2y + xz^2 + x^2z + \\ + yz^2 + y^2z). \end{aligned}$$

Воспользуемся доказанным в пункте а) тождеством

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Учтем, что $3(x + y)(x + z)(y + z) = 3(xy^2 + x^2y + xz^2 + x^2z + yz^2 + y^2z + 2xyz)$. Тогда в итоге получим $P_2 = 6xyz + 6xyz = 12xyz$, а потому

$$P = (x + y + z)P_2 = 12xyz(x + y + z).$$

2.6. а) Доказать, что многочлен $(y^2 - z^2)x + (z^2 - x^2)y + (x^2 - y^2)z$ не обращается в нуль ни при каких попарно различных значениях переменных x, y, z .

б) Многочлен $x^3 + px + q$ обращается в нуль при $x = \alpha$, при $x = \beta$ и при $x = \gamma$. Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Решение.

а) Обозначим данный многочлен буквой P . Разложим его на множители:

$$\begin{aligned} P &= (xy^2 - xz^2 + yz^2 - yx^2 + zx^2 - zy^2) + xyz - xyz = \\ &= xy(y - z) + xz(y - z) - x^2(y - z) - yz(y - z) = \\ &= (y - z)(xy + xz - x^2 - yz) = (x - y)(y - z)(z - x). \end{aligned}$$

Итак, $P = (x - y)(y - z)(z - x)$, откуда сразу следует доказываемое утверждение.

б) Из условия следует, что $x^3 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, т. е. $x^3 + px + q = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$. Приравняв коэффициенты при x^2 , получим: $0 = -(\alpha + \beta + \gamma)$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

2.10. Пусть $x + y = -7$, а $xy = -1$. Найти значение выражения:

$$\text{а) } \frac{|x - y|}{xy^2 + x^2y} + 2 \left| \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right|; \quad \text{б) } \frac{|x^4 - y^4|}{xy^3 + x^3y} + \left| \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right|.$$

Решение.

$$\text{а) } |x - y| = \sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy} = \sqrt{53};$$

$$xy^2 + x^2y = xy(x + y) = 7;$$

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{|xy|} = |x + y| |x - y| = 7\sqrt{53}.$$

$$\text{В итоге получаем: } \frac{\sqrt{53}}{7} + 14\sqrt{53} = \frac{99\sqrt{53}}{7}.$$

$$\text{б) } \frac{|x^4 - y^4|}{xy^3 + x^3y} = \frac{|x^2 - y^2| |x^2 + y^2|}{xy(x^2 + y^2)} = -|x^2 - y^2| = -7\sqrt{53} \quad (\text{см. пункт а)).}$$

$$\left| \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right| = \frac{|x^4 - y^4|}{x^2y^2} = |x^2 - y^2| |x^2 + y^2| =$$

$$= 7\sqrt{53} \quad ((x + y)^2 - 2xy) = 357\sqrt{53}.$$

В итоге получаем $350\sqrt{53}$.

2.22. г) Построить график уравнения $(|x| - 2)^2 + (|y| - 3)^2 = 9$.

Решение. Если $x > 0$, $y > 0$, то уравнение принимает вид $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

Его графиком является та часть окружности с центром в точке $(2; 3)$ и радиусом 3, которая расположена в первом координатном угле координатной плоскости (рис. 1). Поскольку исходное уравнение содержит не x , а $|x|$, его график должен быть симметричен относительно оси y . Поскольку исходное уравнение содержит не y , а $|y|$, его график симметричен относительно оси x . Учитывая эти обстоятельства, строим график уравнения — он изображен на рисунке 2.

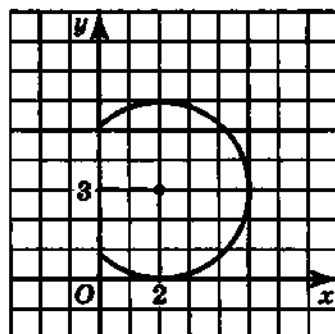


Рис. 1

2.23. г) Построить график уравнения $(|x| - 3)(|y| - 2) = 1$.

Решение. Если $x > 0$, $y > 0$, то уравнение можно преобразовать к виду

$$y \frac{1}{x - 3} + 2. \text{ Его графиком являет-}$$

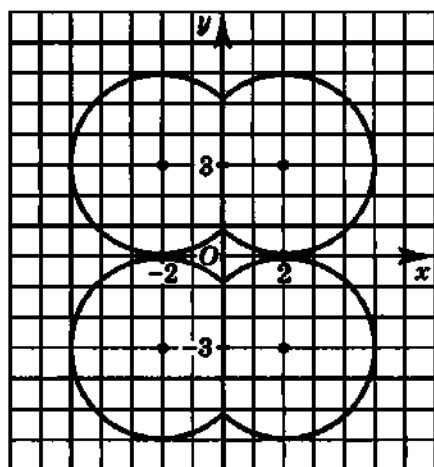


Рис. 2

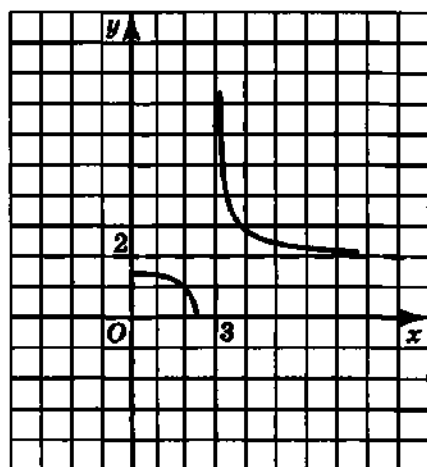


Рис. 3

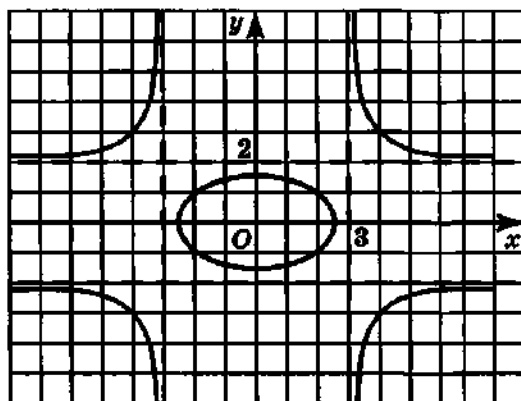


Рис. 4

ся та часть гиперболы с асимптотами $x = 3$, $y = 2$, которая расположена в первом координатном угле координатной плоскости (рис. 3). Рассуждая далее, как в предыдущем номере, строим график заданного уравнения — он изображен на рисунке 4.

2.27. а) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 4|x|y - 3y^2 = 2, \\ x^2 - |x|y + 5y^2 = 5. \end{cases}$$

Решение. Введя новую переменную $z = |x|$, получим одно-

родную систему
$$\begin{cases} z^2 + 4zy - 3y^2 = 2, \\ z^2 - zy + 5y^2 = 5. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$5(z^2 + 4zy - 3y^2) = 2(z^2 - zy + 5y^2);$$

$$3z^2 + 22zy - 25y^2 = 0;$$

$$(z - y)(3z + 25y) = 0;$$

$$z = y; \quad z = -\frac{25y}{3}.$$

Теперь задача сводится к решению двух более простых систем уравнений:

$$\begin{cases} z = y, \\ z^2 - zy + 5y^2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\frac{25y}{3}, \\ z^2 - zy + 5y^2 = 5. \end{cases}$$

Учитывая, что $z \geq 0$, получаем из первой системы $y = 1, z = 1$, а из второй — $y = -\frac{3}{\sqrt{149}}, z = \frac{25}{\sqrt{149}}$. Остается лишь вспомнить, что $z = |x|$.

$$\text{Ответ: } (\pm 1; 1), \left(\pm \frac{25}{\sqrt{149}}; -\frac{3}{\sqrt{149}} \right).$$

2.28. 6) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x(y - 1) + (y - 1)^2 = 3, \\ x^2 + y^2 = 2y + 1. \end{cases}$$

Указание. Достаточно преобразовать второе уравнение к виду $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ и ввести новую переменную $z = y - 1$. Тогда по-

лучится однородная система уравнений $\begin{cases} x^2 + xz + z^2 = 3, \\ x^2 + z^2 = 2. \end{cases}$

2.34. а) Решить систему уравнений $\begin{cases} |x - y| + xy = x + y, \\ x^2 + y^2 - x - y = 2. \end{cases}$

Решение. Это — симметрическая система. Введем две новые переменные: $u = x + y, v = xy$. Тогда $x^2 + y^2 = u^2 - 2v, |x - y| =$

$$\sqrt{(x - y)^2} = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy} = \sqrt{u^2 - 4v}. \text{ Теперь заданную си-}$$

стему можно переписать в виде $\begin{cases} \sqrt{u^2 - 4v} + v = u, \\ u^2 - 2v - u = 2. \end{cases}$

Из первого уравнения системы последовательно находим:

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2 - 4v} &= u - v; \quad u^2 - 4v = u^2 - 2uv + v^2; \\ v &= 0; \quad v = 2u - 4. \end{aligned}$$

Задача сводится к решению совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} v = 0, \\ u^2 - 2v - u = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} v = 2u - 4, \\ u^2 - 2v - u = 2. \end{cases}$$

Решив эти системы и учтя, что должно выполняться условие $u - v \geq 0$ (из-за возведения в квадрат), получим две пары: $u = 2, v = 0$ или $u = 3, v = 2$.

Осталось решить две простые системы:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Ответ: (0; 2), (2; 0), (1; 2), (2; 1).

2.35. а) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3a^2, \\ xy(x + y) = 2 \end{cases}$$

имеет нечетное число решений?

Решение. Эта система симметрическая, значит, если она имеет решение $(c; b)$, то пару ему составит решение $(b; c)$. Общее число решений будет нечетным, если среди решений встречается нечетное число решений вида $(b; b)$. Значит, должно дополнительно выполняться условие $x = y$. В этом случае второе уравнение системы принимает вид $2x^3 = 2$, откуда находим, что единственным возможным решением интересующего нас вида будет пара (1; 1). Но тогда первое уравнение системы превращается в $3 = 3a^2$, откуда находим, что $a = \pm 1$.

2.38. б) Решить уравнение

$$(5x - 2y - 7)^2 + 4|3x - 2y - 5| = 3x - 2y - 5.$$

Решение. Из условия следует, что $3x - 2y - 5 \geq 0$. Тогда $|3x - 2y - 5| = 3x - 2y - 5$ и заданное уравнение принимает вид

$$(5x - 2y - 7)^2 + 3(3x - 2y - 5) = 0.$$

Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю. Значит, задача

сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} 5x - 2y - 7 = 0, \\ 3x - 2y - 5 = 0, \end{cases}$ откуда находим: $x = 1, y = -1$.

2.39. б) Найти все тройки чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0.$$

Решение.

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0;$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что ему удовлетворяют только тройки чисел вида $(t; t; t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2.41. б) Найти наибольшее значение выражения

$$-x^2 - 4xy - 10y^2 + 14y + 12.$$

Решение.

$$-x^2 - 4xy - 10y^2 + 14y + 12 =$$

$$-(x + 2y)^2 - 6\left(y^2 - \frac{14}{6}y + \frac{49}{36}\right) + \frac{49}{6} + 12 =$$

$$\frac{121}{6} - (x + 2y)^2 - 6\left(y - \frac{7}{6}\right)^2$$

Теперь ясно, что наибольшее значение этого выражения равно $\frac{121}{6}$, т. е. $20\frac{1}{6}$, и достигается оно при одновременном выполнении двух условий: $y = \frac{7}{6}$, $x + 2y = 0$.

2.43. в) Доказать, что многочлен $3x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 11$ принимает положительные значения при любых действительных значениях переменных.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{2}(6x^2 - 4xy + 2y^2 - 12x - 4y + 22) =$$

$$= \frac{1}{2}((2x - y)^2 + (y - 2)^2 + 2(x - 3)^2).$$

Полученное выражение явно неотрицательно. Может ли оно обратиться в нуль? Для этого должны одновременно выполняться три условия: $x = 3$, $y = 2$, $2x - y = 0$. А это невозможно. Значит, полученное выражение положительно при любых действительных значениях переменных.

§ 3. Уравнения высших степеней

3.13. Найти все значения параметров a и b , при каждом из которых многочлен $p(x)$ имеет три различных целых корня:

а) $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$; б) $p(x) = bx^3 + ax^2 + x + 2$.

Решение. а) Пусть x_1, x_2, x_3 — целочисленные корни многочлена. Тогда имеет место равенство $x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, откуда следует, что $x_1 x_2 x_3 = -2$. Целочисленными корнями данного многочлена могут быть только числа 1, -1, 2, -2, но из них лишь тройка 1, -1, 2 удовлетворяет условию $x_1 x_2 x_3 = -2$. Таким образом,

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2,$$

т. е. $a = -2, b = -1$.

б) $bx^3 + ax^2 + x + 2 = b(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Значит, $bx_1 x_2 x_3 = -2$, причем для корней многочлена, как и в пункте а), выбор надо делать из чисел 1, -1, 2, -2. Отсюда сразу следует, что рассмотреть надо лишь две возможности: 1) 1, -1, 2, $b = 1$; 2) 1, -1, -2, $b = -1$.

В первом случае получаем: $(x - 1)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Это нас не устраивает, поскольку в заданном многочлене $p(x)$ коэффициент при x равен 1, а не -1.

Во втором случае получаем: $-(x - 1)(x + 1)(x + 2) = -x^3 - 2x^2 - x + 2$. Это нас устраивает. Итак, $a = -2, b = -1$.

3.22. г) Решить уравнение $25x^4 - 50x^3 + 14x^2 + 10x + 1 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на x^2 , получим:

$$\left(25x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(5x - \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Пусть $5x - \frac{1}{x} = y$, тогда уравнение примет вид $(y^2 + 10) - 10y + 14 = 0$, откуда находим: $y_1 = 6, y_2 = 4$. Остается решить совокупность уравнений $5x - \frac{1}{x} = 6; 5x - \frac{1}{x} = 4$.

Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{14}}{5}, 1, -\frac{1}{5}$.

3.25. г) Решить уравнение $(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 8x + 7) = 63$.

Указание.

$$(x - 4)(x + 2)(x - 1)(x - 7) = 63;$$

$$((x - 4)(x - 1))(x + 2)(x - 7) = 63;$$

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x - 14) = 63.$$

Остается лишь ввести новую переменную, например,

$$x^2 - 5x - 14 = y.$$

3.26. г) Решить уравнение

$$(2x^2 - x - 6)^2 - 3(2x^2 - x - 6)(x^2 + 10x - 6) + 2(x^2 + 10x - 6)^2 = 0.$$

Указание. Пусть $a = 2x^2 - x - 6$, $b = x^2 + 10x - 6$. Тогда уравнение можно переписать в виде $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$ и далее $(a - b)(a - 2b) = 0$. Остается решить совокупность уравнений: $a = b$; $a = 2b$, т. е.

$$2x^2 - x - 6 = x^2 + 10x - 6; \quad 2x^2 - x - 6 = 2(x^2 + 10x - 6).$$

3.27. б) Решить уравнение $(x^2 + 6x - 9)^2 + x(x^2 + 4x - 9) = 0$.

Решение. Можно, конечно, использовать рутинные приемы: раскрыть скобки, привести подобные члены и в полученном приведенном уравнении четвертой степени попробовать найти целочисленные корни. Но изящнее действовать так: введем новую переменную $y = x^2 + 5x - 9$, перепишем уравнение в виде $(y + x)^2 + x(y - x) = 0$ и далее $y(y + 3x) = 0$. Значит, либо $x^2 + 5x - 9 = 0$,

откуда находим $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$, либо $x^2 + 5x - 9 = -3x$, откуда находим $x_3 = 1$, $x_4 = -9$.

3.28. г) Решить уравнение $(5x + 3)^4 + (5x - 1)^4 = 32$.

Указание. Введите новую переменную $y = 5x + 1$.

3.31. а) Найти такие целые числа a , b , c и d , что для всех значений x выполняется равенство

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Решение. Имеем:

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (bc + ad)x + bd.$$

Значит, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a + c = 1, \\ b + d + ac = -4, \\ bc + ad = -1, \\ bd = 1. \end{cases}$$

Последнее равенство возможно лишь в двух случаях: $b = 1$, $d = 1$ или $b = -1$, $d = -1$. В первом случае первые три уравнения

образуют систему $\begin{cases} a + c = 1, \\ ac = -6, \\ c + a = -1. \end{cases}$ Эта система несовместна. Во вто-

ром случае первые три уравнения образуют систему $\begin{cases} a + c = 1, \\ ac = -2, \\ c + a = 1. \end{cases}$

Эта система совместна, она имеет решения $a = 2$, $c = -1$ или $a = -1$, $c = 2$.

Получили в итоге две четверки значений a, b, c, d : $2, -1, -1, -1$ и $-1, -1, 2, -1$. В обоих случаях — одно и то же представление заданного многочлена четвертой степени в виде произведения квадратных трехчленов:

$$x^4 + x^2 - 4x^2 - x + 1 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1).$$

На идее этого номера основан № 3.32. Например, чтобы решить уравнение $x^4 + x^2 - 4x^2 - x + 1 = 0$, достаточно воспользоваться тождеством, доказанным в № 3.31 а).

3.34. Докажите, что если функция $y = f(x)$ выпукла вверх (вниз) на K , то уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не более двух корней.

Решение. Предположим, что уравнение имеет более двух корней. Это значит, что прямая $y = ax + b$ и график функции $y = f(x)$ имеют по крайней мере три точки пересечения — они указаны на рисунке 5. Функция по условию выпукла вверх, значит, на отрезке $[x_1; x_2]$ график функции расположен выше прямой. Аналогично он будет расположен выше прямой и на отрезке $[x_2; x_3]$. Но тогда функция не может быть выпуклой вверх на всей числовой прямой, ибо можно провести прямую (прямая l на рисунке 5), относительно которой на графике функции есть точки, расположенные как выше, так и ниже этой прямой. Получили противоречие.

Воспользовавшись этим фактом, можно решить уравнения, представленные в этом номере. Например, решим уравнение $x^4 = 15x - 14$. Два корня этого уравнения можно угадать: 1 и 2. Поскольку функция $y = x^4$ выпукла вниз, более двух корней уравнение иметь не может, т. е. найденные числа — это все множество корней уравнения.

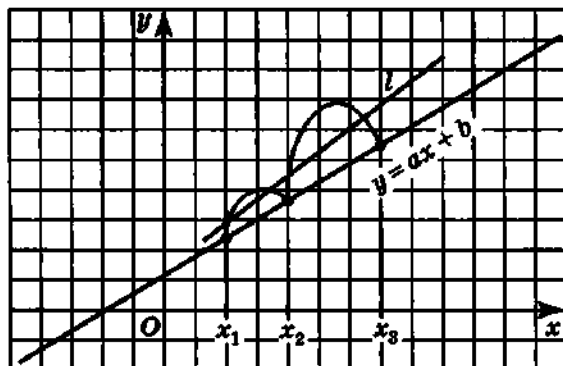


Рис. 5

ГЛАВА 2. Степени и корни. Степенные функции

§ 5. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

5.9. б) Построить график функции

$$y = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{1} \cdot \frac{2x-1}{x} - \frac{4x^2-6x-4}{2-x}}.$$

Решение. $y = \sqrt[4]{-\frac{(3x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{(4x+2)(x-2)}{x-2}}$, т. е.

$y = \sqrt[4]{x+1}$, где $x \neq 1, 2$. График функции изображен на рисунке 6 (схематически).

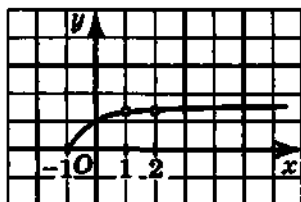


Рис. 6

5.18. г) Найти область определения функции

$$y = \sqrt[8]{\frac{6x^3 + 11x^2 - 19x + 6}{x^3 - 8,25x^2 + 14x - 3}}.$$

Решение. Попробуем найти целочисленный корень многочлена $6x^3 + 11x^2 - 19x + 6$. Искать его следует среди делителей свободного члена многочлена, т. е. среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Корнем является число -3 . Разделив рассматриваемый многочлен на $x + 3$ (уголком или по схеме Горниера), получим его разложение на множители: $6x^3 + 11x^2 - 19x + 6 =$

$$= (x + 3)(6x^2 - 7x + 2) = 6(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

Рассмотрим уравнение $x^3 - 8,25x^2 + 14x - 3 = 0$, преобразуем его к виду $4x^3 - 33x^2 + 56x - 12 = 0$ и попробуем найти целочисленный корень уравнения среди делителей числа 12. Убедившись, что $x = 2$ — корень уравнения, преобразуем левую часть уравнения к виду $(x - 2)(4x^2 - 25x + 6)$ и далее к виду

$$4(x - 2)(x - 6)\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

Итак, $x^3 - 8,25x^2 + 14x - 3 = (x - 2)(x - 6)\left(x - \frac{1}{4}\right)$.

Область определения заданной функции совпадает с множеством решений неравенства

$$\frac{6x^3 + 11x^2 - 19x + 6}{x^3 - 8,25x^2 + 14x - 3} > 0, \text{ т. е. } \frac{6(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}{(x - 2)(x - 6)\left(x - \frac{1}{4}\right)} > 0.$$

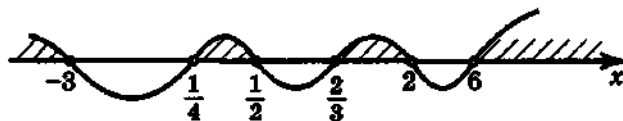


Рис. 7

Решив это неравенство методом интервалов (рис. 7), получим ответ:

$$D(f) = (-\infty; -3] \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (6; +\infty).$$

5.29. г) Решить неравенство $\sqrt[3]{x-7} < 3x+1$.

Решение. Построив графики функций $y = \sqrt[3]{x-7}$, $y = 3x+1$ (рис. 8), получим ответ: $x > -1$.

5.34. г) Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \sqrt{4 - 11x - 3x^2}.$$

Решение. Решив неравенство $4 - 11x - 3x^2 \geq 0$, находим, что $D(f) = \left[-4; \frac{1}{3}\right]$. Далее, $y' = \frac{-11 - 6x}{2\sqrt{4 - 11x - 3x^2}}$. Замечаем, что $y' = 0$ при $x = -\frac{11}{6}$ — это точка максимума функции, причем

$y_{\max} = y\left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\frac{3}{4}$. Для правильного построения графика следует учесть, что при приближении к концам отрезка области определения функции $y' \rightarrow \infty$. Это значит, что в концевых точках график функции перпендикулярен оси абсцисс.

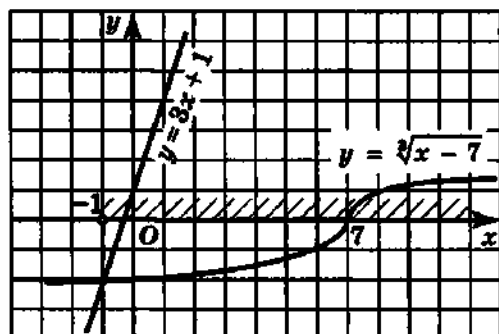


Рис. 8

График изображен на рисунке 9. На самом деле, это — половина эллипса. Чтобы в этом убедиться, следует преобразовать заданное уравнение к виду $3x^2 + 11x + y^2 = 4$ и далее:

$$\frac{\left(x + \frac{11}{6}\right)^2}{\left(\frac{13}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{13}{\sqrt{12}}\right)^2} = 1.$$

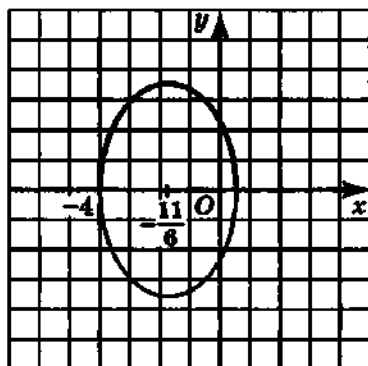


Рис. 9

Теперь видно, что это — уравнение эллипса с центром в точке $\left(-\frac{11}{6}; 0\right)$ и

полуосями $\frac{13}{6}$, $\frac{13}{\sqrt{12}}$ (но разговор об этом, разумеется, выходит за рамки школьной программы).

§ 6. Свойства корня n -й степени

6.13. г) Вычислить: $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}}$.

Решение.

$$17 - 12\sqrt{2} = 9 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2.$$

$$\text{Итак, } \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Теперь попытаемся представить выражение $99 + 70\sqrt{2}$ в виде полного куба $(a + b\sqrt{2})^3$, т. е. $a^3 + 3a^2b\sqrt{2} + 6ab^2 + 2b^3\sqrt{2}$. Имеем:

$$99 + 70\sqrt{2} = a^3 + 3a^2b\sqrt{2} + 6ab^2 + 2b^3\sqrt{2}.$$

Нам повезет, если удастся подобрать натуральные числа a и b так, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + 6ab^2 & 99, \\ 3a^2b + 2b^3 & 70. \end{cases}$$

Итак, попробуем найти натуральные решения составленной системы уравнений. Заметим, что первому уравнению могут удовлетворять только нечетные значения a , конкретнее — только 1 или 3 (5 — уже много). Поскольку из первого уравнения следует, что $a \geq 3$ ($a^3 = 99 - 6ab^2 = 3(33 - 2ab^2)$; значит, $a^3 \geq 3$, откуда и следует, что $a \geq 3$), делаем вывод: единственное интересующее нас значение a может быть только 3.

Если $a = 3$, то система принимает вид $\begin{cases} b^2 = 4, \\ 27b + 2b^3 = 70. \end{cases}$
 Значит, $b = 2$.

Итак, $a = 3$, $b = 2$. На всякий случай проверим: $(3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2}$; это верное равенство. Значит, $\sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2})^3} = 3 + 2\sqrt{2}$.

Таким образом,

$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6.$$

6.14. г) Вычислить: $\sqrt[3]{170 + 78\sqrt{3}} - \sqrt[3]{78\sqrt{3} - 170}$.

Решение. Первый способ (как в № 6.13).

$$170 + 78\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^3 \quad a^3 + 3a^2b\sqrt{3} + 9ab^2 + 3b^3\sqrt{3};$$

$\begin{cases} a^3 + 9ab^2 & 170, \\ 3a^2b + 3b^3 & 78. \end{cases}$ Натуральным значением b , удовлетворяющим второму уравнению системы, может быть или 1, или 2.

Если $b = 1$, то система принимает вид $\begin{cases} a^3 + 9a = 170, \\ a^3 + 1 = 26. \end{cases}$ Этой системе удовлетворяет натуральное значение $a = 5$.

Если $b = 2$, то система принимает вид $\begin{cases} a^3 + 36a = 170, \\ 2a^3 + 8 = 26. \end{cases}$ Эта система не имеет натуральных решений.

Итак, $a = 5$, $b = 1$; $\sqrt[3]{170 + 78\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(5 + \sqrt{3})^3} = 5 + \sqrt{3}$.

Аналогично устанавливаем, что $\sqrt[3]{170 - 78\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(5 - \sqrt{3})^3} = 5 - \sqrt{3}$. Значит, $\sqrt[3]{170 + 78\sqrt{3}} - \sqrt[3]{78\sqrt{3} - 170} = 5 + \sqrt{3} + (5 - \sqrt{3}) = 10$.

Второй способ. Пусть $\sqrt[3]{170 + 78\sqrt{3}} - \sqrt[3]{78\sqrt{3} - 170} = x$. Тогда $x^3 = (170 + 78\sqrt{3}) - (78\sqrt{3} - 170) - 3\sqrt[3]{170 + 78\sqrt{3}} \sqrt[3]{78\sqrt{3} - 170} \times$
 $\times (\sqrt[3]{170 + 78\sqrt{3}} - \sqrt[3]{78\sqrt{3} - 170}) = 340 - 3x\sqrt{(78\sqrt{3})^2 - 170^2}$

$340 + 3x\sqrt{10648} = 340 + 66x$ (мы воспользовались формулой $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$).

Таким образом, интересующее нас число x является корнем уравнения $x^3 - 66x - 340 = 0$. Подбором находим первый корень

итого уравнения: $x = 10$. Разделив многочлен $x^3 - 66x - 340$ на $x - 10$, получим $x^2 + 10x + 34$. Этот квадратный трехчлен действительных корней не имеет. Значит, единственным корнем уравнения является число 10, а потому $\sqrt[3]{170 + 78\sqrt{3}} - \sqrt[3]{78\sqrt{3} - 170} = 10$.

§ 7. Преобразование выражений, содержащих радикалы

7.42. б) Вычислить: $\frac{2}{\sqrt{3} + 1} + \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{25} + \sqrt{23}}$.

Решение. Если всюду освободиться от иррациональности в знаменателе, то получим:

$$(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{25} - \sqrt{23}) = \sqrt{25} - 1 = 4.$$

7.43. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}}$, если известно, что

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Решение. Пусть $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{k^2}$. Тогда $\sqrt{a_1} = k\sqrt{a}$, $\sqrt{b_1} = k\sqrt{b}$, $\sqrt{c_1} = k\sqrt{c}$ и заданную дробь можно преобразовать к виду $\frac{1}{(k+1)(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}$. Далее последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{(k+1)(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})} = \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{(k+1)(a + b - c - 2\sqrt{ab})} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(k+1)((a + b - c)^2 - 4ab)} = \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{\left(\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a}} + 1\right)((a + b - c)^2 - 4ab)} = \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})(\sqrt{a_1} - \sqrt{a})}{(a_1 - a)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)}. \end{aligned}$$

7.45. а) Вычислить: $\sqrt[4]{17 + \sqrt{288}}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{17 + \sqrt{288}} &= \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(3 + 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1.\end{aligned}$$

7.51. б) Проверить равенство $\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} = 3$.

Указание. См. второй способ решения № 6.14 г).

§ 9. Степенные функции, их свойства и графики

9.41. а) Провести касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$ из точки $M(0; 1)$.

Решение. Если a — абсцисса точки касания, то уравнение касательной имеет вид $y = f(a) + f'(a)(x - a)$; здесь $f(x) = \sqrt{x}$, $f(a) = \sqrt{a}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Значит, уравнение касательной можно переписать в виде $y = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$, т. е. $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{\sqrt{a}}{2}$. Поскольку касательная проходит через точку $M(0; 1)$, получаем, что $1 = \frac{\sqrt{a}}{2}$, т. е. $a = 4$. Значит, уравнение касательной таково: $y = \frac{1}{4}x + 1$.

9.42. а) Составить уравнение той касательной к графику функции $y = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}$, которая отсекает от осей координат треугольник площадью 0,75.

Решение. На рисунке 10 построен график заданной функции, проведена касательная к нему в некоторой точке $x = a$; по условию задачи площадь S треугольника AOB равна 0,75.

Рассуждая как в № 9.41, составляем уравнение касательной

$$\begin{aligned}y &= \left(a^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3a^{\frac{1}{3}}}(x - a); \\ y &= \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь a — абсцисса точки касания, $a > 0$.

Чтобы найти длину катета OB , подставим в уравнение (1) значение $x = 0$; получим: $OB = \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}$. Чтобы найти длину катета OA , подставим в уравнение (1) значение $y = 0$; получим:

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3} = 0,$$

$$x = -\frac{a + 2\sqrt[3]{a}}{2}.$$

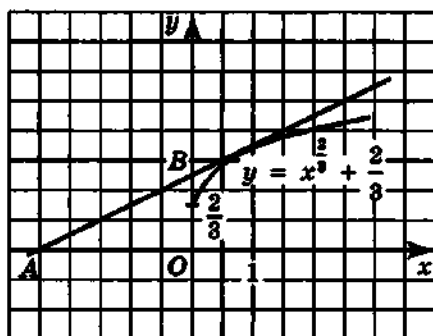


Рис. 10

Итак, $OA = |x| = \frac{a + 2\sqrt[3]{a}}{2}$. Далее,

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{a + 2\sqrt[3]{a}}{2}\right).$$

Введя новую переменную $z = \sqrt[3]{a}$ и учтя, что $S = \frac{3}{4}$, получим уравнение $\frac{(z^3 + 2)(z^3 + 2z)}{12} = \frac{3}{4}$, т. е. $z^6 + 4z^3 + 4z = 9$.

Это уравнение имеет очевидный корень $z = 1$, причем этот корень единственный в силу монотонности функции $u = z^6 + 4z^3 + 4z$ (она возрастает на всей числовой прямой).

Итак, $\sqrt[3]{a} = 1$, $a = 1$ и уравнение (1) принимает вид $y = \frac{2}{3}x + 1$.

9.45. а) Построить график уравнения $(3y + x)^2 = 27x$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $y = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}$.

Эта функция нечетная, значит, для начала можно ограничиться ее исследованием при $x \geq 0$. Найдем производную функции:

$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. При $x = 0$ производная не существует, это — критическая точка, в ней касательная к графику функции перпендикулярна оси абсцисс; при $x = 1$ производная обращается в нуль,

это — точка максимума, причем $y_{\max} = y(1) = \frac{2}{3}$. Полезно также

найти нули функции; из уравнения $\sqrt[3]{x} - \frac{x}{3} = 0$ находим: $x_1 = 0$,

$x_2 = \pm 3\sqrt{3}$. График изображен на рисунке 11.

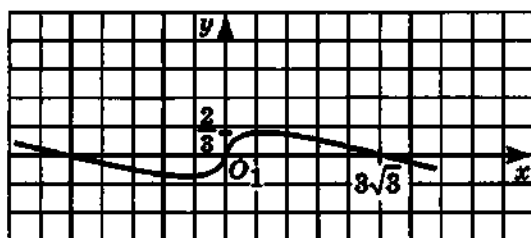


Рис. 11

9.48. На графике функции $y = x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x$ выбирают произвольную точку M и соединяют с началом координат O . Строят прямоугольник, диагональю которого является отрезок OM , а две стороны расположены на осях координат. Найти наименьшее значение периметра такого прямоугольника.

Решение. Сначала схематически построим график функции. Учтем следующие обстоятельства: 1) $D(f) = (0; +\infty)$; 2) функция убывает (как сумма двух убывающих функций $y = x^{\frac{2}{3}}$ и $y = -\frac{1}{3}x$); 3) $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$, значит, $x = 0$ — вертикальная асимптота графика функции; 4) $y = 0$ при $x = \sqrt[3]{27} = 3$; это точка пересечения графика функции с осью абсцисс. График изображен на рисунке 12. Ясно, что для отыскания наименьшего периметра прямоугольника точку M надо брать в первой (а не в четвертой) четверти, причем абсцисса точки M должна быть, естественно, не больше, чем $\sqrt[3]{27}$; тогда прямоугольник выгля-

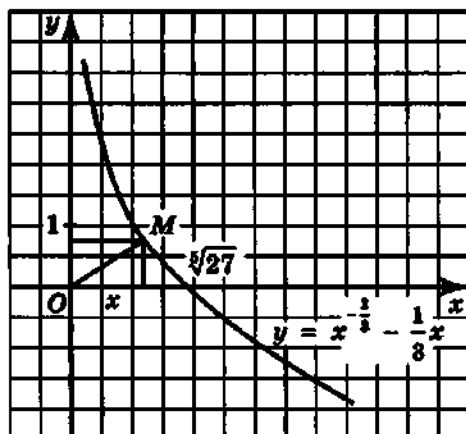


Рис. 12

дит так, как показано на рисунке 12. Обозначим периметр прямоугольника буквой P . Тогда $P = 2x + 2\left(x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x\right) = 2x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x$.

Итак, речь идет об отыскании наименьшего значения функции $P = 2x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x$ на полуинтервале $(0; \sqrt[3]{27}]$.

Имеем $P' = -\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}$; $P' = 0$ при $x = 1$. Это единственная точка экстремума в рассматриваемом полуинтервале, причем точка минимума; значит, $P_{\min} = P(1) = 3\frac{1}{3}$.

§ 10. Извлечение корней из комплексных чисел

На тему «Комплексные числа» в наших учебниках акцент сделан в 10 классе. Там этой теме посвящено пять параграфов, в которых практически полностью изложен весь предусмотренный государственным стандартом материал. Исключение составляет тема «Извлечение корня n -й степени из комплексного числа». В 10 классе это сделать было невозможно, так как даже для действительных чисел эта тема изучается в 11 классе. Содержательно же изложить все про комплексные числа в одном 10 классе и не вернуться к ним в 11 классе вряд ли разумно.

Поэтому цель этой темы в учебнике и задачнике 11 класса двояка. Во-первых, мы основательно повторяем материал 10 класса. Во-вторых, мы дополняем его изложением «последней» алгебраической операции извлечения корней n -й степени и завершаем изложение формулировкой основной теоремы алгебры. Последняя теорема имеет большое значение не только с чисто теоретической точки зрения, но важна и с практической, так как позволяет раскладывать на линейные и квадратичные множители любой многочлен с действительными коэффициентами. Задачный материал разделен примерно поровну: задачи № 10.1—10.12 повторяют и варьируют темы, изученные в 10 классе, задачи № 10.13—10.22 посвящены новым темам.

Более детально, № 10.1 и 10.2 — это деление и умножение комплексных чисел в алгебраической (декартовой) форме записи; № 10.3—10.5 — в тригонометрической (полярной) форме записи; № 10.6 — это задача на множества в комплексной плоскости; № 10.7, 10.9, 10.10 — упражнения на формулу Муавра; № 10.8 — решение квадратных уравнений с комплексными коэффициентами; № 10.11 и 10.12 — извлечение квадратных и кубических корней соответственно.

Извлечение корней четвертой и шестой степеней в декартовых координатах рассмотрено в задачах № 10.13 и 10.14, а в задачах № 10.15 и 10.16 извлечение корней проводится уже в тригонометрической форме записи. Следует подчеркнуть, что извлечение корней в практических задачах связано с вычислением тригонометрических функций «плохих» углов и количество естественно формулируемых упражнений с нормально выглядящими ответами здесь сравнительно невелико. Поэтому в задачке мы явно делаем акцент на многочлены и их разложение на множители, т. е. на тот учебный материал, который необходим каждому школьнику, изучающему математику на профильном уровне. Многочленам и решению уравнений третьей и четвертой степени посвящены задачи № 10.17–10.22.

10.5. а) Расположить комплексные числа в порядке возрастания их аргументов:

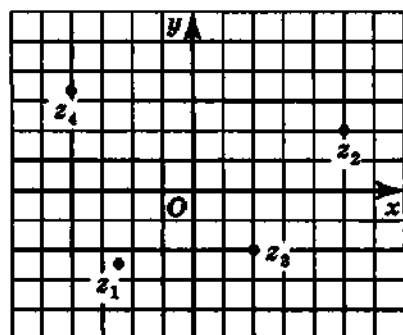
$$z_1 = \sqrt{3} - 2 + i(\pi - 4), \quad z_2 = \sqrt{5} - 2 + i(\pi^2 - 9), \\ z_3 = \sqrt[4]{17} - \sqrt[3]{31} + i(1 - 2^{0.2}), \quad z_4 = \sqrt[10]{1000} - \sqrt[6]{600} + i(3^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{5}}).$$

Решение. $z_1 = x_1 + iy_1$; здесь $x_1 = \sqrt{3} - 2 < 0$, $y_1 = \pi - 4 < 0$. Значит, точка $z_1 = x_1 + iy_1$ располагается в третьей четверти комплексной плоскости.

$z_2 = x_2 + iy_2$; здесь $x_2 = \sqrt{5} - 2 > 0$, $y_2 = \pi^2 - 9 > 0$. Значит, точка $z_2 = x_2 + iy_2$ располагается в первой четверти комплексной плоскости.

$z_3 = x_3 + iy_3$; здесь $x_3 = \sqrt[4]{17} - \sqrt[3]{31} > 0$, $y_3 = 1 - 2^{0.2} < 0$. Значит, точка $z_3 = x_3 + iy_3$ располагается в четвертой четверти комплексной плоскости.

$z_4 = x_4 + iy_4$; здесь $x_4 = \sqrt[10]{1000} - \sqrt[6]{600} < 0$ (поскольку $\sqrt[10]{1000} < 2$, $\sqrt[6]{600} > 2$), $y_4 = 3^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{5}} > 0$. Значит, точка $z_4 = x_4 + iy_4$ располагается во второй четверти комплексной плоскости.



На рисунке 13 схематически представлены все четыре точки, расположенные в комплексной плоскости, их аргументы берутся в промежутке от $-\pi$ до π ; расположив их в порядке возрастания, получим z_1, z_3, z_2, z_4 .

Рис. 13

10.16. а) Записать все значения $\sqrt[5]{1}$.

б) Доказать тождество $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$; подобрать действительные числа $A < B$ так, чтобы выполнялось тождество $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + Az + 1)(z^2 + Bz + 1)$.

в) Используя результаты пунктов а) и б), вычислить $\cos 72^\circ$, $\sin 72^\circ$.

г) Найти стороны a_5, a_{10} правильного пяти- и десятиугольников, вписанных в единичную окружность.

Решение. а) $\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Итак,

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1; \quad z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} =$$

$$= \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ; \quad z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} = \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ;$$

$$z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} = \cos 216^\circ + i \sin 216^\circ;$$

$$z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} = \cos 288^\circ + i \sin 288^\circ.$$

б) Первое тождество можно доказать непосредственным раскрытием скобок в его правой части. Второе тождество перепишем в виде $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = z^4 + (A + B)z^3 + (AB + 2)z^2 + (A + B)z + 1$, откуда получаем:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ AB + 2 = 1; \end{cases} \quad A = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad B = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

в) Как доказано выше, $z^5 - 1 = (z - 1)(z^2 + Az + 1)(z^2 + Bz + 1)$,

где $A = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0, B = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$. Число $z_1 = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$

является корнем уравнения $z^5 - 1 = 0$, т. е. либо корнем уравнения $z^2 + Az + 1 = 0$, либо корнем уравнения $z^2 + Bz + 1 = 0$.

Но если число z_1 является корнем квадратного уравнения с действительными коэффициентами, то и сопряженное число $\cos 72^\circ - i \sin 72^\circ$ является корнем уравнения. Их сумма равна, с одной стороны, $2 \cos 72^\circ$, а с другой стороны, по теореме Виета, либо $-A$, либо $-B$. Но $2 \cos 72^\circ > 0$, значит, $2 \cos 72^\circ = -A$, т. е.

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Что касается $\sin 72^\circ$, то он вычисляется стандартным способом:

$$\sin 72^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 72^\circ} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

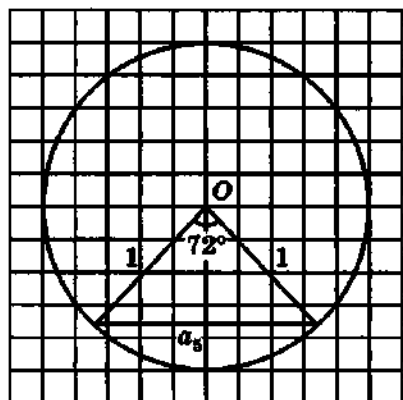


Рис. 14

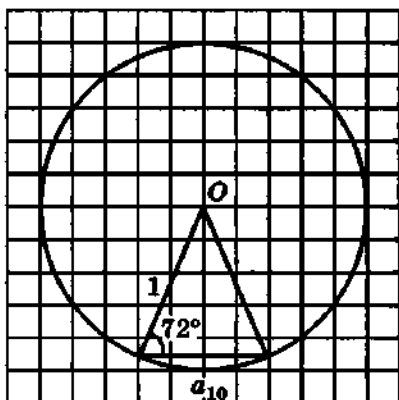


Рис. 15

г) Воспользовавшись теоремой косинусов, находим (см. рис. 14):

$$a_5^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 72^\circ = 2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2};$$

значит, $a_5 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$

Чтобы вычислить сторону правильного десятиугольника, достаточно заметить, что $\frac{a_{10}}{2} = 1 \cdot \cos 72^\circ$ (рис. 15). Значит,

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

10.19. 6) Сформулировать и доказать теорему Виета для приведенного многочлена четвертой степени.

Решение. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — корни многочлена $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$. Тогда

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4).$$

Раскрыв скобки, получим четыре соотношения (теорема Виета):

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 &= -a; \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 &= b; \\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 &= -c; \\ z_1z_2z_3z_4 &= d. \end{aligned}$$

10.21. Решите уравнения и изобразите их корни на комплексной плоскости:

а) $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0;$

в) $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0;$

б) $z^3 + 3z^2 + 5z + 15 = 0;$

г) $z^3 + 4z^2 - 50z + 100 = 0.$

Как обычно, решение таких уравнений основано или на разложении на множители (задания а) и б)), или на подборе одного корня ($z = 1$ и $z = -10$ в заданиях в) и г)) с последующим делением «уголком» или применением схемы Горнера.

ГЛАВА 3. Показательная и логарифмическая функции

В § 11 сначала рассматривается функция $y = 2^x$, $x \in \mathbb{Q}$. Отмечается, что это — возрастающая функция, неограниченная сверху и ограниченная снизу, не имеющая ни наименьшего, ни наибольшего значений. Как правило, учащихся смущает некоторое, на их взгляд, искусственность ситуации: они привыкли рассматривать функции, заданные на сплошных промежутках, а им предлагают рассмотреть функцию, заданную на «дырявом» множестве рациональных чисел. Несколько комфортнее будут чувствовать себя здесь те учителя и учащиеся, которые исповедуют иную концепцию с 7 класса. Дело в том, что начиная с 7 класса в наших учебниках отдается приоритет функциям с заданной областью определения (такowymi являются, например, кусочные функции) и ученики постепенно привыкают к любому виду области определения. Если, в частности, область определения функции — множество натуральных чисел, то получается числовая последовательность. Именно так мы действовали в курсе алгебры 9 класса, при первом знакомстве с числовыми последовательностями, именно так мы действовали и в учебнике для 10 класса (см. § 37).

Учащиеся должны понять, что показательные функции встречаются в реальной действительности (кратко об этом говорится на с. 89 учебника), и осознать, с какой трудностью им придется столкнуться при изучении показательных функций. Дело в том, что для всех ранее изученных функций вычисление конкретных значений функций не представляло особого труда. Если, например, была дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, то можно вычислить значение функции при любом значении аргумента x , как рациональном, так и иррациональном. Например, $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = 1$, $f(\sqrt{3}) = 6 - 5\sqrt{3} + 3 = 9 - 5\sqrt{3}$ и т. д. Если $y = f(x)$ — тригонометрическая функция, то мы вообще отдавали предпочтение иррациональным значениям аргумента $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{13\pi}{4} \text{ и т. д.}\right)$ С показательной функцией дело обстоит сложнее, поскольку об иррациональных показательных степенях нигде в курсе речь не шла.

Понятие степени с иррациональным показателем — достаточно тонкое и сложное. Если основание степени a — положительное число, отличное от 1, а показатель степени t — положительное иррациональное число, то сначала строят последовательность десятичных приближений числа t по недостатку: $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, — а затем последовательность рациональных степеней числа a : $a_1', a_2', a_3', \dots, a_n', \dots$. Эта последовательность монотонна и ограничена и поэтому сходится (по теореме Вейерштрасса). Предел последовательности и принимается за a^t . Это — типичная для классического анализа «теорема существования»: искомое значение существует, а что оно собой представляет конкретно, — никого не волнует; главное, что оно есть и однозначно определено (в силу теоремы о единственности предела). Но так же обстояло дело и раньше: мы знаем, например, что $\operatorname{arctg} 0,8$ — конкретное и вполне определенное число, которое можно использовать при записи выражений, не думая о том, что это за число.

Если вы использовали в 9 классе наш учебник алгебры, то помните учащимся, что с терминами «показательная функция» и «экспонента» они уже встречались. Приведем здесь (с небольшими изменениями) фрагмент из упомянутого учебника (из параграфа о геометрической прогрессии).

«Перепишем формулу n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$ в виде

$$b_n = \frac{b_1}{q} q^n$$

и введем обозначения: $b_n = y$, $\frac{b_1}{q} = m$. Получим $y = m q^n$ или, подробнее, $y = m q^x$, $x \in N$. Аргумент x содержится в показателе степени, поэтому такую функцию называют *показательной*. Значит, геометрическую прогрессию можно рассматривать как показательную функцию, заданную на множестве N натуральных чисел. График функции состоит из изолированных точек (с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и т. д.), лежащих на некоторой кривой, которую называют *экспонентой*».

Завершая разговор о материале § 11, подчеркнем, что это — непосредственное продолжение главы 2, где учащиеся познакомились с обобщением понятия о показателе степени (удалось довести дело до степени с любым рациональным показателем). То, что соответствующие параграфы расположены в учебнике практически рядом, — несомненный плюс.

Обращаем внимание читателя на четыре теоремы, на которых в следующих двух параграфах базируется теория решения показательных уравнений и неравенств.

Теорема 1. Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^t > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $t > 0$; неравенство $a^t < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $t < 0$.

Теорема 3. Если $0 < a < 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 4. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^t > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $t < 0$; неравенство $a^t < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $t > 0$.

Материал следующих двух параграфов (§ 12 и 13) достаточно традиционен и не нуждается в особых комментариях: речь идет о показательных уравнениях и неравенствах. Отметим лишь одно обстоятельство. В примере 7 из § 12 мы пришли к совокупности двух простейших показательных уравнений:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x - \frac{3}{5}; \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2.$$

С первым из этих уравнений проблем нет:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}, x = -1.$$

Со вторым уравнением у нас возникает проблема: как представить число 2 в виде некоторой степени числа $\frac{5}{3}$, мы пока не знаем. Между тем второе уравнение тоже имеет единственный корень — это хорошо видно из графической иллюстрации, — но как его записать, пока неизвестно. Естественно, что к указанной проблеме придется вернуться позднее (это сделано в конце § 14).

Понятие логарифма в § 14 вводится при помощи графических соображений (как и понятие корня n -й степени), а изучению логарифмов предшествует изучение функции $y = \log_a x$. Обратите внимание, что порядок ходов в § 14—16 (понятие логарифма, логарифмическая функция, свойства логарифмов) традиционен для нашей концепции; такой порядок ходов был и в главе 2 при изучении радикалов.

Существует несколько методических подходов к решению логарифмических уравнений, о которых идет речь в § 17. Особенно популярным в последнее время стал такой подход: сначала надо найти ОДЗ (область допустимых значений переменной) уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, для чего следует решить систему неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

В нашем учебнике, где функционально-графическая линия — приоритетная, мы естественно не могли пройти мимо красивой графической идеи, которая заключается в следующем.

Логарифмических функций бесконечно много: $y = \log_2 x$; $y = \log_{0,2} x$; $y = \lg x$; $y = \log_3 x$ и т. д. Рассматривая их

графики для случая, когда основания логарифмов больше 1, например $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$, можно высказать предположение, что график первой функции получается из графика второй функции растяжением от оси x с некоторым коэффициентом $k > 1$, т. е. что

$$\log_2 x = k \log_3 x.$$

Выведа формулу перехода к новому основанию логарифма, убеждаемся в справедливости высказанного предположения:

$$\log_2 x = \log_2 3 \log_3 x$$

($k = \log_2 3$); подтвердилась и наша догадка о том, что в данном случае $k > 1$, поскольку $\log_2 3 > 1$.

Вторая особенность заключается в том, что мы придаем большое значение частному случаю формулы перехода, который зафиксирован в учебнике в следствии 2: если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа $r \neq 0$ справедливо равенство

$$\log_a b = \log_a b^r.$$

Например,

$$\log_2 3 = \log_2 3^2 = \log_{2^2} 3^2 = \log_4 9 \text{ и т. д.}$$

Сама формула перехода к новому основанию доказана с помощью метода введения новых переменных, как и все свойства логарифмов в § 16, как и все свойства корней n -й степени в § 6 (заметим, что тот же прием мы использовали и в курсе алгебры 8 класса при выводе свойств квадратных корней).

Принципиальное значение имеет § 19, в котором ученики знакомятся с числом e и натуральными логарифмами, с функциями $y = e^x$ и $y = \ln x$, с соответствующими формулами дифференцирования и интегрирования. В курсе математического анализа, на-

помним, число e вводится как значение предела: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

(второй замечательный предел). Идти этим путем в общеобразовательной школе мы сочли неразумным. Конечно, второй замечательный предел очень важен в математике, но школьники в этом не смогут убедиться, так что указанный формальный путь окажется для них чистой схоластикой. Мы выбрали известный методический прием, опирающийся на интуицию и правдоподоб-

ные рассуждения: рассматриваем графики показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, для различных оснований a и касательные к этим графикам в точке $(0; 1)$. Замечаем, что для функции $y = 2^x$ касательная образует с осью x угол 35° , для функции $y = 3^x$ — угол 48° , для функции $y = 10^x$ — угол $66,5^\circ$ (разумеется, все значения углов даны приближенно). Здравый смысл подсказывает, что, наверное, есть такое основание (его обозначают буквой e), для которого соответствующий угол равен 45° . Это основание должно быть заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35° , что меньше, чем 45° , а для функции $y = 3^x$ он равен 48° , что больше, чем 45° . В курсе математического анализа доказано, что e — иррациональное число, т. е. представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь: $e = 2,7182818284590\dots$

§ 11. Показательная функция, ее свойства и график

11.78. а) Найти наибольшее целочисленное значение функции $y = 10^{\sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x + 0,5}$.

б) Сколько целых чисел принадлежит области значений функции $y = 30 \cdot 3^{\cos 2,5x \cos 3,5x + \sin 2,5x \sin 3,5x - 2}$?

Решение. а) Имеем: $y = 10^{\sin 5x + 0,5}$; $-0,5 \leq \sin 5x + 0,5 \leq 1,5$. Значит, $E(f) = [10^{-0,5}; 10^{1,5}]$. Далее, $10^{1,5} = \sqrt{1000}$, наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{1000}$, равно 31.

б) Имеем $y = \frac{10}{3} \cdot 3^{\cos x}$, $E(f) = \left[\frac{10}{9}; 10\right]$. Этому отрезку принадлежит девять целых чисел.

§ 12. Показательные уравнения

12.28. б) Решить уравнение

$$(\sqrt{10} - 3)^{4x} - 6(19 - 6\sqrt{10})^x - 1 = 0.$$

Решение. Заметим, что $(\sqrt{10} - 3)^2 = 19 - 6\sqrt{10}$. Введем новую переменную $y = (\sqrt{10} - 3)^{2x}$. Тогда уравнение примет вид $y^2 - 6y - 1 = 0$, откуда $y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$. Осталось решить уравнение $(\sqrt{10} - 3)^{2x} = 3 + \sqrt{10}$. Но $3 + \sqrt{10} = \frac{1}{\sqrt{10} - 3} = (\sqrt{10} - 3)^{-1}$.

Значит, $2x = -1$, т. е. $x = -\frac{1}{2}$.

12.36. а) Решить уравнение $5^{2x^2-1} - 3 \cdot 5^{(x+1)(x+2)} = 2 \cdot 5^{4(x+1)}$.

Решение. Если разделить обе части уравнения почленно на $5^{6(x+1)}$, то получим: $5^{2x^2-6x-7} - 3 \cdot 5^{x^2-3x-4} = 2$. Есть смысл ввести новую переменную $y = 5^{x^2-3x-4}$. Тогда получим квадратное уравнение $5y^2 - 3y - 2 = 0$. Здесь $y = 1$. Остается решить уравнение $5x^2 - 3x - 4 = 1$.

Ответ: 4; -1.

12.38. б) Решить уравнение $25^{2x+6} + 16 \cdot 4^{2x+4} = 20 \cdot 10^{2x+5}$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на 4^{2x+4} , перепишем уравнение в виде $625 \left(\frac{25}{4}\right)^{2x+4} + 16 = 200 \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+4}$. Введя новую переменную $y = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+4}$ получим уравнение $625y^2 - 200y + 16 = 0$, т. е. $(25y - 4)^2 = 0$. Значит, $y = \frac{4}{25}$.

Из уравнения $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+4} = \frac{4}{25}$ находим $x = -3$.

12.41. б) При каких значениях параметра a уравнение $4x - 3 \cdot 2^x + a^2 - 4a = 0$ имеет два корня?

Решение. Введем новую переменную $y = 2^x$. Тогда задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра a квадратное уравнение $y^2 - 3y + a^2 - 4a = 0$ имеет два положительных корня. Во-первых, дискриминант $D = -4a^2 + 16a + 9$ должен быть положительным. Во-вторых, корни y_1, y_2 по теореме Виета должны удовлетворять соотношениям: $y_1 + y_2 = 3$, $y_1 y_2 = a^2 - 4a$. Значит, обязательно должно выполняться неравенство $a^2 - 4a > 0$. Итак, задача сводится к решению системы не-

$$\text{равенств } \begin{cases} -4a^2 + 16a + 9 > 0, \\ a^2 - 4a > 0. \end{cases}$$

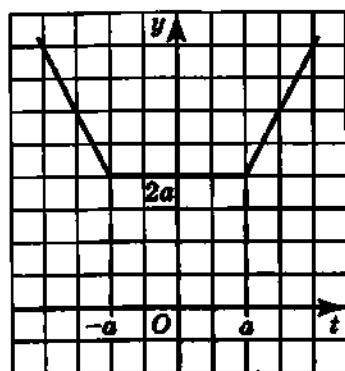
Ответ: $-0,5 < a < 0$; $4 < a < 4,5$.

12.43. При каких значениях параметра a уравнение

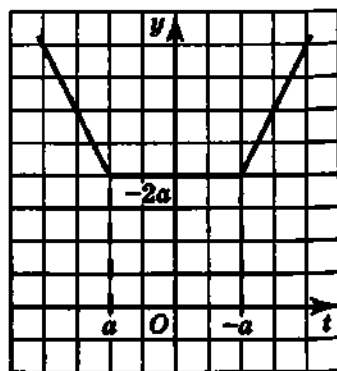
$$|3^x - a| + |3^x + a| = 2$$

имеет бесконечно много корней?

Решение. Введя новую переменную $t = 3^x$, перепишем уравнение в виде $|t - a| + |t + a| = 2$. Построим график функции $y = |t - a| + |t + a|$. Если $a > 0$, то он выглядит так, как показано на рисунке 16 а; если $a < 0$ — как на рисунке 16 б (случай $a = 0$



а)



б)

Рис. 16

нас не интересует: при $a = 0$ заданное уравнение имеет один корень). В первом случае бесконечно много корней уравнение будет иметь при условии $2a = 2$, т. е. $a = 1$, во втором — при условии $-2a = 2$, т. е. $a = -1$.

§ 13. Показательные неравенства

13.38. б) Решить неравенство $x \cdot (0,5)^x > -8$.

Решение. Неравенство явно выполняется при $x > 0$. Если $x < 0$, то преобразуем неравенство к виду $(0,5)^x < -\frac{8}{x}$. Построим графики функций $y = (0,5)^x$, $y = -\frac{8}{x}$ (рис. 17). Поскольку одна из функций возрастает, а другая убывает, графики их пересекаются только в одной точке, абсцисса этой точки равна -2 . Значит, при $x < 0$ интересующее нас неравенство выполняется на полуинтервале $[-2; 0)$.

Ответ: $x > -2$.

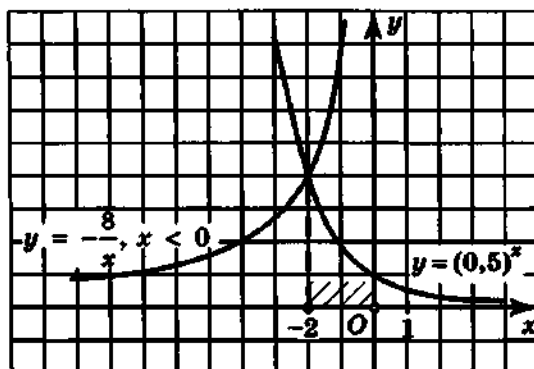


Рис. 17

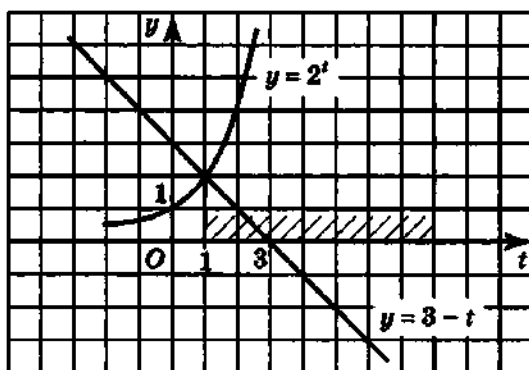


Рис. 18

13.39. 6) Решить неравенство $2^{x^2 - 4x + 5} > 4x - 2 - x^2$.

Решение. Пусть $t = x^2 - 4x + 5$. Тогда неравенство принимает вид $2^t > 3 - t$, откуда находим (рис. 18), что $t > 1$. Значит, $x^2 - 4x + 5 > 1$, т. е. $(x - 2)^2 > 0$, что верно при любом значении x .

13.45. а) Решить неравенство $(2^x - 8)(3^x - 81) < 0$.

Решение. Неравенство равносильно сравнительно несложной совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} 2^x - 8 > 0, & 2^x - 8 < 0, \\ 3^x - 81 < 0; & 3^x - 81 > 0. \end{cases}$$

Но изящнее применить здесь (как и во всей серии № 13.43—13.45) так называемый *обобщенный метод интервалов*. Из уравнения $(2^x - 8)(3^x - 81) = 0$ находим его корни: 3 и 4. Точки 3 и 4 разбивают числовую прямую на три промежутка, на каждом из которых непрерывная функция $y = (2^x - 8)(3^x - 81)$ сохраняет постоянный знак (рис. 19). Значит, интересующее нас неравенство выполняется на интервале (3; 4).

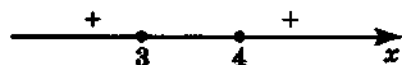


Рис. 19

13.46. 6) При каких значениях параметра a неравенство $4^x - (a - 3)2^{x+1} + 2a + 2 < 0$ не имеет решений?

Решение. Пусть $t = 2^x$, тогда заданное неравенство можно переписать в виде системы неравенств
$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 - 2(a - 3)t + 2a + 2 < 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств не имеет решений в двух случаях: когда дискриминант D квадратного трехчлена $t^2 - 2(a - 3)t + 2a + 2$

неположителен — это будет при $1 < a < 7$ — или когда $D > 0$, но оба корня неположительны, что по теореме Виета приводит к неравенствам $a - 3 < 0$, $2a + 2 > 0$. Таким образом, второй случай сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} (a - 1)(a - 7) > 0, \\ a - 3 < 0, \\ 2a + 2 > 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $-1 < a < 1$. Объединив промежутки $[-1; 1)$ и $[1; 7]$, получим $[-1; 7]$.

§ 16. Свойства логарифмов

16.22. Сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$; б) $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$.

Решение. а) Пусть $\log_3 4 = a$, $\sqrt[4]{2} = b$. Получим:

$$a = \log_3 4 = \frac{1}{4} \quad \log_3 4^4 = \frac{1}{4} \quad \log_3 256 > \frac{1}{4} \quad \log_3 243 = \frac{5}{4};$$

$$b = \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{\frac{625}{256}} = \frac{5}{4}.$$

Итак, получили, что $a > \frac{5}{4}$, $b < \frac{5}{4}$. Следовательно, $a > b$.

б) Пусть $\log_2 3 = a$, $\sqrt[3]{7} = b$. Имеем:

$$a = \log_2 3 = \frac{1}{5} \quad \log_2 3^5 = \frac{1}{5} \quad \log_2 243 < \frac{1}{5} \quad \log_2 256 = \frac{8}{5};$$

$$b = \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{\frac{512}{125}} = \frac{8}{5}.$$

Итак, получили, что $a < \frac{8}{5}$, $b > \frac{8}{5}$. Значит, $a < b$.

16.46. а) Вычислить:

$$\frac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \frac{\log_2 7}{\log_{224} 2}.$$

Решение. Заданное числовое выражение можно переписать в виде

$$\log_2 56 \log_2 28 - \log_2 7 \log_2 224.$$

Далее имеем:

$$(3 + \log_2 7)(2 + \log_2 7) - \log_2 7(5 + \log_2 7).$$

Положим $\log_2 7 = a$, получим:

$$(3 + a)(2 + a) - a(5 + a) = 6.$$

16.59. 6) Найти $\log_{35} 28$, если известно, что $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

Решение.

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} 14 + \log_{14} 2}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \frac{1 + (\log_{14} 14 - \log_{14} 7)}{a + b} = \frac{2 - a}{a + b}.$$

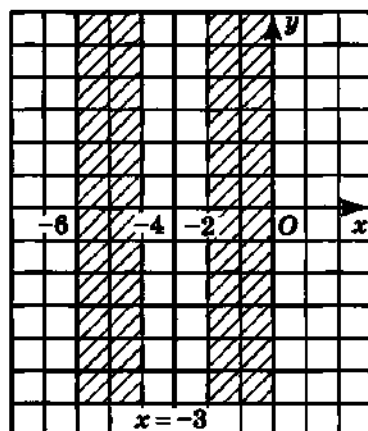


Рис. 20

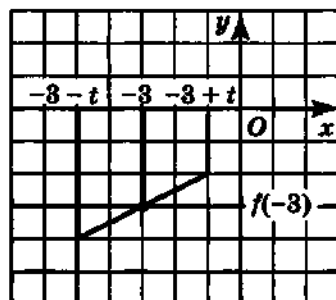


Рис. 21

16.65. Найти координаты центра симметрии графика функции

$$y = x + \lg \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 10x + 24}.$$

Решение. Решив неравенство

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 10x + 24} > 0, \text{ найдем область}$$

определения функции: $D(f) = (-\infty; -6) \cup (-4; -2) \cup (0; +\infty)$ — ее геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 20 (в заштрихованных областях ветвей графика нет). Если график функции имеет центр симметрии $(a; b)$, то область определения функции будет симметрична относительно прямой $x = a$. В данном случае такой прямой является $x = -3$, а потому центром симметрии может служить только точка с абсциссой $x = -3$. Найдем значение заданной функции в этой точке: $f(-3) = -3$. Итак, центром симметрии графика может служить только точка $(-3; -3)$.

Теперь нужно выяснить, на самом ли деле указанная точка является центром симметрии. Для этого необ-

ходимо и достаточно, чтобы заданная функция $y = f(x)$ удовлетворяла следующему соотношению: $f(-3 - t) + f(-3 + t) = 2f(-3)$ (рис. 21) для любого действительного числа t такого, что $(-3 + t) \in D(f)$. Выполним необходимые вычисления:

$$\begin{aligned} f(-3 - t) + f(-3 + t) &= (-3 - t) + \lg \frac{(-3 - t)^2 + 2(-3 - t)}{(-3 - t)^2 + 10(-3 - t) + 24} + \\ &+ (-3 + t) + \lg \frac{(-3 + t)^2 + 2(-3 + t)}{(-3 + t)^2 + 10(-3 + t) + 24} = \end{aligned}$$

$$= -6 + \lg \frac{t^2 + 4t + 3}{t^2 - 4t + 3} + \lg \frac{t^2 - 4t + 3}{t^2 + 4t + 3} = -6 = 2/(-3).$$

Итак, $(-3; -3)$ — центр симметрии графика заданной функции.

§ 17. Логарифмические уравнения

17.39. Решить уравнение:

$$а) x^2 \log_6(5x^2 - 2x - 3) - x \log_{\frac{1}{6}} \sqrt{5x^2 - 2x - 3} = x^2 + x;$$

$$б) x^2 \log_2 \frac{3+x}{10} - x^2 \log_{\frac{1}{2}}(2+3x) = \\ = x^2 - 4 + 2 \log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}.$$

Решение. а) Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{1}{2}x^2 \log_6(5x^2 - 2x - 3) + \frac{1}{2}x \log_6(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + x$$

и введем новую переменную $a = \log_6(5x^2 - 2x - 3)$. Получим рациональное уравнение с двумя переменными $\frac{1}{2}x^2 a + \frac{1}{2}xa = x^2 + x$ и далее $x(x+1)(a-2) = 0$. Значит, либо $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, либо $a = 2$, т. е. $\log_6(5x^2 - 2x - 3) = 2$, откуда находим: $x_3 = 3$, $x_4 = -\frac{13}{5}$.

Условию $5x^2 - 2x - 3 > 0$ не удовлетворяет значение 0 — это посторонний корень.

б) Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 \log_2 \frac{(3+x)(2+3x)}{10} = x^2 - 4 + 4 \log_2 \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}$$

и введем новую переменную $a = \log_2 \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}$. Получим рациональное уравнение с двумя переменными $x^2 a = x^2 - 4 + 4a$ и далее $(x-2)(x+2)(a-1) = 0$. Значит, либо $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, либо $a = 1$, т. е. $\log_2 \frac{3x^2 + 11x + 6}{10} = 1$, откуда находим: $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{14}{3}$.

Условиям $x + 3 > 0$, $2 + 3x > 0$ не удовлетворяют значения $x_1 = -2$, $x_4 = -\frac{14}{3}$ — это посторонние корни.

Ответ: а) $-1, 3, -2\frac{3}{5}$; б) $1, 2$.

17.43. Решить уравнение

$$\log_x(3x - \sqrt{18}) + \log_x(6 + x\sqrt{72} + 3x^2) = \frac{\lg 27x^3}{\lg x^2}.$$

Решение.

$$6 + x\sqrt{72} + 3x^2 = 3(x^2 + 2x\sqrt{2} + 2) = 3(x + \sqrt{2})^2;$$

$$3x - \sqrt{18} = 3(x - \sqrt{2}).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \log_x(3x - \sqrt{18}) + \log_x(6 + x\sqrt{72} + 3x^2) &= \\ = \log_x 3(x - \sqrt{2}) + \log_x 3\sqrt{3}(x + \sqrt{2}) &= \log_x 3\sqrt{3}(x^2 - 2). \end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть заданного уравнения:

$$\frac{\lg 27x^3}{\lg x^2} = \log_x 27x^3 = \log_x 3\sqrt{3}x.$$

В итоге заданное уравнение можно переписать в виде $\log_x 3\sqrt{3}(x^2 - 2) = \log_x 3\sqrt{3}x$, т. е. $x^2 - 2 = x$, откуда находим $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Проверка. ОДЗ уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x - \sqrt{2} > 0. \end{cases}$$

Значение $x_2 = -1$ системе не удовлетворяет — это посторонний корень.

Ответ: 2.

§ 18. Логарифмические неравенства

18.33. г) Решить неравенство $\log_{\cos x} \frac{1}{2} < 2$.

Решение. Неравенство $\log_{\cos x} \frac{1}{2} < \log_{\cos x} \cos^2 x$ равносильно

системе неравенств
$$\begin{cases} 0 < \cos x < 1, \\ \frac{1}{2} > \cos^2 x. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и далее (рис. 22)

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

18.35. 6) Решить неравенство

$$\log_{10-x^2} \left(\frac{16}{5}x - x^2 \right) < 1.$$

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 10 - x^2 > 1, \\ \frac{16}{5}x - x^2 > 0, \\ \frac{16}{5}x - x^2 < 10 - x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < 10 - x^2 < 1, \\ \frac{16}{5}x - x^2 > 10 - x^2. \end{cases}$$

Ответ: $0 < x < 3; \frac{25}{8} < x < \sqrt{10}.$

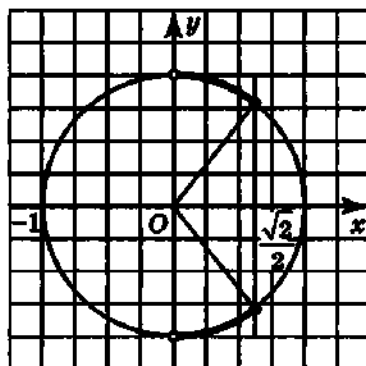


Рис. 22

18.37. 6) Решить неравенство

$$1 + \log_5 5 \log_7 x > \log_5 35 \log_5 5.$$

Решение.

$$1 + \frac{1}{\log_5 x} \frac{\log_5 x}{\log_5 7} > \frac{\log_5 35}{\log_5 x}; \frac{1 + \log_5 7}{\log_5 7} > \frac{1 + \log_5 7}{\log_5 x}; \frac{1}{\log_5 7} > \frac{1}{\log_5 x}.$$

Последнее неравенство явно выполняется при $0 < x < 1$; если же $x > 1$, то оно сводится к неравенству $\log_5 7 < \log_5 x$, откуда получаем $x > 7$.

Ответ: $0 < x < 1; x > 7.$

18.38. а) Решить неравенство $\log_3 x^2 + \log_3^2(-x) < 2.$

Указание. Воспользоваться тем, что $x < 0$ и что $\log_3 x^2 = \log_3 |x| = \log_3 (-x)$, и ввести новую переменную $y = \log_3 (-x)$.

18.39. 6) Решить неравенство $\log_x 5 \log_{5x} 5 \log_5 625x < 1.$

Указание. Перейти во всех логарифмах к основанию 5 и ввести новую переменную $y = \log_5 x$.

18.46. а) Решить неравенство $\log_{5x-4x^2} (4^{-x}) > 0.$

Решение. Имеем: $x \log_{5x-4x^2} 4 < 0$. Если $5x - 4x^2 > 1$, то $\log_{5x-4x^2} 4 > 0$, значит, из $x \log_{5x-4x^2} 4 < 0$ следует, что должно выполняться неравенство $x < 0$. Если же $0 < 5x - 4x^2 < 1$, то

$\log_{5x-4x^2} 4 < 0$, значит, из $x \log_{5x-4x^2} 4 < 0$ следует, что должно выполняться неравенство $x > 0$. В итоге приходим к совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 5x - 4x^2 > 1, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 5x - 4x^2 < 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а из второй получаем:

$$0 < x < \frac{1}{4}; \quad 1 < x < \frac{5}{4}.$$

18.47. а) Решить неравенство

$$\frac{\log_5(2x-3) - \lg(2x-3)}{\lg x - \log_{20} x} > \log_5 20.$$

Решение.
$$\frac{\frac{\lg(2x-3)}{\lg 5} - \lg(2x-3)}{\lg x - \frac{\lg x}{\lg 20}} > \frac{\lg 20}{\lg 5};$$

$$\frac{\lg 20 \lg(2x-3)(1 - \lg 5)}{\lg 5 \lg x (\lg 20 - 1)} > \frac{\lg 20}{\lg 5}; \quad \frac{\lg(2x-3)}{\lg x} > 1.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \lg x > 0, \\ \lg(2x-3) > \lg x; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x < 0, \\ \lg(2x-3) < \lg x. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x > 3$; вторая система не имеет решений.

§ 19. Дифференцирование показательной и логарифмической функций

19.21. При каких значениях параметра a функция $y = x^6 e^{-x}$ на интервале $(a; a+7)$:

- а) имеет одну точку экстремума; в) убывает;
б) имеет две точки экстремума; г) возрастает?

Решение. $y' = 6x^5 e^{-x} - x^6 e^{-x} = x^5 e^{-x} (6 - x)$.

Функция имеет две стационарные точки: $x = 0$ и $x = 6$, причем $y' < 0$ при $x < 0$ или при $x > 6$; $y' > 0$ при $0 < x < 6$ (рис. 23). Следовательно, $x = 0$ — точка минимума, а $x = 6$ — точка максимума функции.

а) Функция будет иметь на интервале $(a; a+7)$ одну точку экстремума в одном из двух случаев (см. рис. 23):

1) если $a < 0$, $a + 7 > 0$, $a + 7 \leq 6$ (в этом случае точка $x = 0$ принадлежит заданному интервалу, а точка $x = 6$ — не принадлежит);

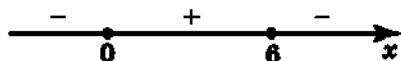


Рис. 23

2) если $a \geq 0$, $a < 6$, $a + 7 > 6$ (в этом случае точка $x = 6$ принадлежит заданному интервалу, а точка $x = 0$ — не принадлежит).

В первом случае имеем $-7 < a < -1$, во втором — $0 \leq a < 6$.

б) Функция будет иметь на интервале $(a; a + 7)$ две точки экстремума, если (см. рис. 23) $a < 0$ и в то же время $a + 7 > 6$, т. е. при $-1 < a < 0$.

в) Функция будет убывать на интервале $(a; a + 7)$, если этот интервал принадлежит лучу $(-\infty; 0]$ или лучу $[6; +\infty)$. Первая ситуация имеет место при условии $a + 7 \leq 0$, т. е. при $a \leq -7$. Вторая имеет место при условии $a \geq 6$.

г) Функция будет возрастать на интервале $(a; a + 7)$, если этот интервал принадлежит отрезку $[0; 6]$. Это не выполняется ни при каком значении a .

19.35. а) При каком значении параметра a прямая $y = 3x - 4 + a$ является касательной к графику функции $y = \ln(3x - 4)$?

Решение. Найдем производную функции $y = \ln(3x - 4)$:

$$y' = \frac{3}{3x - 4}.$$

По условию угловой коэффициент касательной равен 3, следовательно, должно выполняться равенство

$$3 = \frac{3}{3x - 4},$$

откуда находим, что $x = \frac{5}{3}$ — абсцисса точки касания.

Составим уравнение касательной к графику функции

$y = \ln(3x - 4)$ в точке $x = \frac{5}{3}$:

$$y = \ln 1 + 3 \left(x - \frac{5}{3} \right);$$

$$y = 3x - 5.$$

По условию уравнение касательной таково: $y = 3x - 4 + a$. Значит,

$$-5 = -4 + a; \quad a = -1.$$

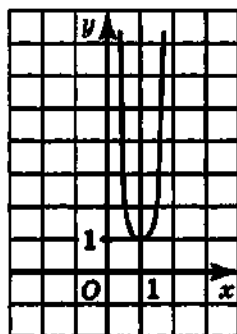


Рис. 24

19.42. Построить график функции:

а) $y = e^{x^2 - 2x + 1}$; б) $y = e^{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Решение. а) Здесь можно обойтись без производной. График функции $y = e^{(x-1)^2}$ можно получить из графика функции $y = e^{x^2}$ параллельным переносом последнего вправо на единицу. Функция $y = e^{x^2}$ четная, ее график симметричен относительно прямой $x = 0$; соответственно график функции $y = e^{(x-1)^2}$ симметричен относительно прямой $x = 1$ (рис. 24).

б) $y' = (3x^2 - 2x - 1)e^{x^3 - x^2 - x + 1}$; $y' = 0$ при $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ — это стационарные точки, критических точек нет. Знаки производной указаны на рисунке 25;

$x = -\frac{1}{3}$ — точка максимума функции, причем $y_{\max} = e^{\frac{32}{27}}$; $x = 1$ — точка минимума функции, причем $y_{\min} = 1$.

Следует еще учесть, что $y(0) = e$ и что $x^3 - x^2 - x + 1 \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, а потому $e^{x^3 - x^2 - x + 1} \rightarrow 0$, т. е. $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции при $x \rightarrow -\infty$. Вот теперь можно построить эскиз графика — он представлен на рисунке 26.

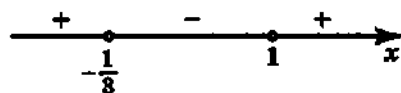


Рис. 25

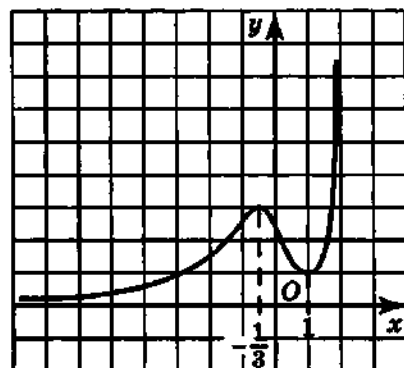


Рис. 26

19.43. Построить график функции: а) $y = x^2 e^x$; б) $y = x^3 e^x$.

Решение. а) $y' = xe^x(x + 2)$;

$y_{\max} = y(-2) = \frac{4}{e^2} \approx \frac{1}{2}$; $y_{\min} = y(0) = 0$.

Значит, мы нашли две ключевые точки для построения графика: $(0; 0)$ и $(-2; \frac{1}{2})$. Полезно еще изучить поведение функции при $x \rightarrow -\infty$. Пусть $t = -x$, тогда

$y = (-t)^2 e^{-t} = \frac{t^2}{e^t}$. Если $x \rightarrow -\infty$, то

$t \rightarrow +\infty$; при этом $\frac{t^2}{e^t} \rightarrow 0$, поскольку экспонента растет значительно быстрее квадратичной функции. Это значит, что $y = 0$ — горизон-

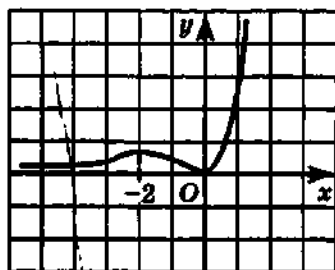


Рис. 27

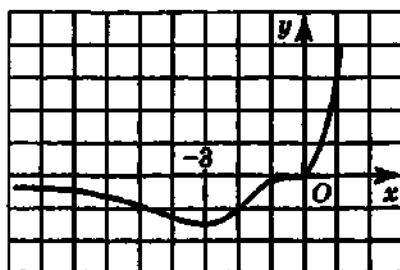


Рис. 28

тальная асимптота графика функции при $x \rightarrow -\infty$. График функции представлен на рисунке 27.

б) $y' = x^2 e^x (x + 3)$; $y_{\min} = y(-3) = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,35$.

Точка $x = 0$ — стационарная точка, но не точка экстремума, это точка перегиба. И еще следует учесть, что, как и в пункте а), $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции при $x \rightarrow -\infty$. График функции представлен на рисунке 28.

19.44. Построить график функции:

а) $y = \ln(x^2 - 2x - 3)$; б) $y = \ln(3 + 2x - x^2)$.

Решение. а) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; $y' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}$.

Производная обращается в нуль в точке $x = 1$ и не существует в точках $x = -1$, $x = 3$, но они не принадлежат области определения функции, значит, ни стационарных, ни критических точек у функции нет.

Прямые $x = -1$, $x = 3$ — вертикальные асимптоты. Можно найти точки пересечения графика с осью абсцисс: из уравнения $\ln(x^2 - 2x - 3) = 0$ находим, что $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$, т. е. $x_1 \approx 3,23$, $x_2 \approx -1,23$. Любопытно еще одно наблюдение: поскольку $y = \ln((x - 1)^2 - 4)$, то график функции симметричен относительно прямой $x = 1$. График представлен на рисунке 29.

б) $D(f) = (-1; 3)$;

$$y' = \frac{2 - 2x}{3 + 2x - x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x = 1$, это стационарная точка, точнее — точка максимума, причем $y_{\max} = y(1) = \ln 4 \approx 1,4$. Производная не существует в точках $x = -1$, $x = 3$, но они не

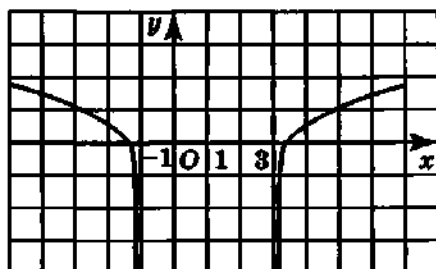


Рис. 29

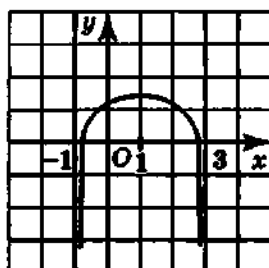


Рис. 30

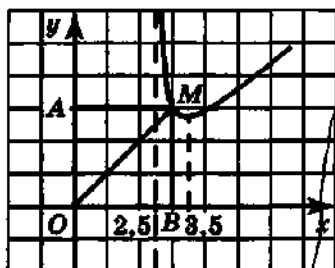


Рис. 31

принадлежат области определения функции, значит, критических точек у функции нет. Прямые $x = -1$, $x = 3$ — вертикальные асимптоты. Можно найти точки пересечения графика с осями координат: из уравнения $\ln(3 + 2x - x^2) = 0$ находим, что $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, т. е. $x_1 \approx 2,73$, $x_2 \approx -0,73$ — это точки пересечения с осью абсцисс; если $x = 0$, то $y = \ln 3 \approx 1,1$ — это точка пересечения с осью ординат. Как и в пункте а), заключаем, что график функции симметричен относительно прямой $x = 1$. График представлен на рисунке 30.

19.45. На графике функции $y = x - \ln(2x - 5)$ выбирают произвольную точку M и соединяют с началом координат O . Строят прямоугольник, диагональю которого является отрезок OM , а две стороны расположены на осях координат. Найти наименьшее значение периметра такого прямоугольника.

Решение. $D(f) = (2,5; +\infty)$; $y' = 1 - \frac{2}{2x - 5} = \frac{2x - 7}{2x - 5}$; $y' = 0$ при $x = 3,5$ — это точка минимума функции; $y_{\min} = y(3,5) = 2,8$. График функции представлен на рисунке 31; $x = 2,5$ — вертикальная асимптота.

Теперь перейдем к решению предложенной задачи на оптимизацию по плану, о котором шла речь в учебнике для 10 класса.

1) Оптимизируемая величина — периметр P прямоугольника $OAMB$ (см. рис. 31).

2) $x = OB$; реальные границы $2,5 < x < 3,5$.

3) $P = 2OB + 2BM = 2x + 2(x - \ln(2x - 5)) = 4x - 2 \ln(2x - 5)$. Таким образом, речь идет об отыскании наименьшего значения функции $P = 4x - 2 \ln(2x - 5)$ на полуинтервале $(2,5; 3,5]$.

4) $P' = 4 - \frac{4}{2x - 5} = \frac{8x - 24}{2x - 5}$; $P' = 0$ при $x = 3$ — это единственная точка экстремума, причем точка минимума функции. Значит, $P_{\min} = P(3) = 12$.

19.46. Расположить комплексные числа в порядке возрастания их аргументов:

$$z_1 = \log_2 0,7 + i \log_{0,5} 7,$$

$$z_2 = \ln 10 + i \lg e,$$

$$z_3 = \ln \pi + i \ln (\pi - 3),$$

$$z_4 = \log_3 0,3 + i \log_{0,3} 0,9.$$

Решение. Подобная задача была в § 10 (см. № 10.5), здесь идея решения та же. Имеем:

$$z_1 = x_1 + iy_1; x_1 = \log_2 0,7;$$

$$y_1 = \log_{0,5} 7; x_1 < 0, y_1 < 0.$$

Значит, точка z_1 располагается в третьей четверти комплексной плоскости. Аналогично устанавливается, что точка z_2 принадлежит первой четверти, точка z_3 — четвертой, а точка z_4 — второй четверти комплексной плоскости (рис. 32). Значит, в порядке возрастания аргументов числа располагаются так: z_1, z_3, z_2, z_4 .

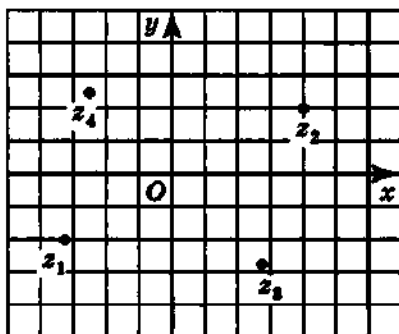


Рис. 32

ГЛАВА 4. Первообразная и интеграл

В § 20 излагается довольно традиционный материал, связанный с понятием первообразной. Обратить внимание следует лишь на доказательство теоремы о том, что множество всех первообразных для данной функции $y = f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$. Учащиеся должны понять логику доказательства теоремы, понять, почему в доказательстве две части. В первой из них доказывается, что любая функция вида $y = F(x) + C$ является первообразной для $f(x)$. Но отсюда еще не следует, что этот вид охватывает все первообразные, отсюда следует лишь то, что любая функция указанного вида содержится в множестве всех первообразных. Поэтому и приходится во второй части доказывать, что первообразных иного вида не существует.

Кроме понятия первообразной, в учебнике вводится понятие неопределенного интеграла. Здесь авторам следует объясниться, ведь в официальной программе термин «неопределенный интеграл» отсутствует. Почему мы решили использовать «запрещенное» понятие? Причина весьма прозаична: математики — люди практичные, поэтому вместо длинного словосочетания «множество всех первообразных для данной функции $y = f(x)$ » предпочитают использовать возможности математического языка, в ко-

тором указанное словосочетание заменяется символом $\int f(x) dx$. Если в курсе имеются математические символы, связанные с пределом и производной, то непонятно, почему надо запрещать использовать символ интеграла, который позволит упростить формулировку заданий и даст возможность сэкономить бумагу.

В § 21 речь идет об определенном интеграле. Он начинается с трех задач, решение которых приводит к одной и той же математической модели, — о вычислении площади криволинейной трапеции, о вычислении массы стержня и о перемещении точки. Здесь важное методологическое значение имеет вывод, который делает учитель на основании рассмотрения конкретных задач. Различные задачи из разных областей знания приводят к одной и той же математической модели вида $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n$. Значит, следует специально заняться изучением этой новой модели, т. е. присвоить ей новый термин (определенный интеграл), придумать для нее новое обозначение $\left(\int_a^b f(x) dx \right)$ и изучить правила оперирования с новой моделью.

Математическое описание той модели, которая была построена в трех указанных выше задачах, выглядит следующим образом. Для функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$:

- 1) разбивают отрезок $[a; b]$ на n равных частей;
- 2) составляют сумму:

$$S_n = f(x_0) \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_n) \Delta x_n + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

- 3) вычисляют $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n$. Этот предел и есть $\int_a^b f(x) dx$.

Напомним, что в курсе математического анализа дается более широкое истолкование модели: отрезок не обязательно делят на равные части и в каждом из участков разбиения берут значение функции в произвольной точке (а не в концевой, как в школьном упрощенном варианте).

При обосновании формулы Ньютона — Лейбница можно ограничиться ее физическим истолкованием, приведенным в учебнике. Конечно, второй способ решения задачи о площади криволинейной трапеции, при котором получается формула $S = F(b) - F(a)$, достаточно красив и убедителен, но знакомство с ним не является обязательным для всех учащихся.

Центральное место во всем разделе, связанном с изучением элементов интегрального исчисления, занимает вычисление площадей плоских фигур. Основной фигурой считается криволиней-

ная трапеция, т. е. фигура, ограниченная в координатной плоскости двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Советуем вам при изучении этого материала правильно расставлять акценты: главное здесь — построение геометрических моделей и снятие соответствующей информации с чертежа, а не вычисление интегралов. Не ради изучения интеграла считаются площади, наоборот, интеграл изучается ради вычисления площадей. В связи с этим обратите особое внимание на упражнения в задачнике, где предлагается вычислить интеграл, опираясь на геометрические соображения (некоторые решения приведены ниже).

§ 20. Первообразная и неопределенный интеграл

20.6. а) Доказать, что функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{16}{3}, & \text{если } |x| > 2, \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{16}{3}, & \text{если } |x| < 2, \end{cases} \quad f(x) = |x^2 - 4| + x.$$

Решение.

Если $x < -2$ или $x > 2$, то $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{16}{3}$, $F'(x) = x^2 +$

$x - 4 = |x^2 - 4| + x$. Если $-2 < x < 2$, то $F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{16}{3}$,

$F'(x) = -x^2 + x + 4 = |x^2 - 4| + x$ (мы воспользовались тем, что если $-2 < x < 2$, то $x^2 - 4 < 0$, а потому $|x^2 - 4| = -x^2 + 4$). Итак, на $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, значит, $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

20.9. а) Установить, является ли функция $y = F(x)$ первообразной для функции $y = f(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3, & \text{если } x > 0, \\ -\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad f(x) = |x|(x^3 + 2x).$$

Решение. Если $x > 0$, то

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3}, \quad F'(x) = x^4 + 2x^2 = |x|(x^3 + 2x).$$

Если $x < 0$, то

$$F(x) = -\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}, \quad F'(x) = -x^4 - 2x^2 = |x|(x^3 + 2x).$$

Итак, на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Осталось разобраться со «стыковой» точкой $x = 0$. В ней функция $y = F(x)$ непрерывна, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0)$. Далее, если $x \rightarrow 0$, то, вычисляя $F'(x)$ как по первой, так и по второй строке задания кусочной функции $y = F(x)$, получаем в пределе 0, но и $f(0) = 0$. Значит, равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется и в точке $x = 0$.

20.39. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке $x = a$, если известно, что $y = F(x)$ первообразная для функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x + 5$, $a = 0$;

б) $f(x) = \log_2 x + \log_2 (x + 1)$, $a = 8$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 3}$, $a = 20$;

г) $f(x) = x^{\frac{1}{5}} - (2x)^{\frac{1}{3}}$, $a = 32$.

Указание. Сложность задачи можно считать повышенной только из-за нетривиальной фабулы. Достаточно понимать, что такое первообразная. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = F(x)$ в точке $x = a$ равен $F'(a)$, т. е. $f(a)$. Значит, в пункте а) надо вычислить $f(0)$, в пункте б) — $f(8)$, в пункте в) $f(20)$, в пункте г) — $f(32)$.

20.40. Сравнить числа $F(a)$ и $F(b)$, если известно, что $y = F(x)$ первообразная для функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = x^2 \ln x$, $a = 2$, $b = 3$;

б) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 27}$, $a = 0$, $b = 1$;

в) $f(x) = \sin^2 x$, $a = \frac{7\pi}{6}$, $b = \frac{4\pi}{3}$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$, $a = \lg 1001$, $b = \log_2 7$.

Решение. а) Функция $y = x^2 \ln x$ положительна $x > 1$, значит, функция $y = F(x)$ возрастает на $(1; +\infty)$, а потому $F(2) < F(3)$.

б) Знаки производной $F'(x)$, т. е. знаки $f(x)$ схематически показаны на рисунке 33.

Если $x < 2$, то $f(x) < 0$, а потому функция $y = F(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 2)$. Значит, $F(0) > F(1)$.

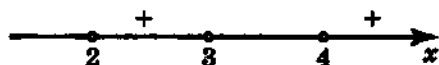


Рис. 33

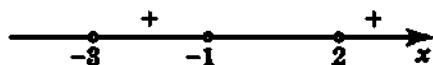


Рис. 34

в) Функция $y = \sin^3 x$ отрицательна в третьей четверти, т. е. в интервале $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, значит, в этом интервале ее первообразная убывает, а потому $F\left(\frac{7\pi}{6}\right) > F\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

г) $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)(x+1)(x-2)}$. Знаки производной $F'(x)$, т. е. знаки $f(x)$, схематически показаны на рисунке 34. При $x > 2$ функция $y = F(x)$ возрастает. Оценим числа a и b : $a = \lg 1001 > 3$, $b = \log_2 7 < 3$. Значит, $a > b$, а потому $F(a) > F(b)$.

20.41. Исследовать функцию $y = F(x)$ на монотонность и экстремумы, если известно, что она является первообразной для функции $y = f(x)$:

б) $f(x) = \sqrt{5x - 24} \lg(x^2 - 6x + 6)$;

в) $f(x) = 2^{x^2 - \sqrt{x} + 1}$;

г) $f(x) = (x^2 - 5x - 14) \log_2(5 - 2x)$.

Решение. б) $F'(x) = f(x) = 0$ при $x = 1$, $x = 4,8$, $x = 5$, при этом $D(f) = [4,8; +\infty)$. Внутри этого луча содержится только одна стационарная точка — точка $x = 5$. Это точка минимума функции $y = F(x)$. Первообразная убывает на отрезке $[4,8; 5]$ и возрастает на луче $[5; +\infty)$.

в) $D(f) = [0; +\infty)$, $F'(x) = f(x) > 0$ при $x > 0$, значит, первообразная функция возрастает на $[0; +\infty)$.

г) $f(x) = 0$ при $x = -2$, $x = 2$, $x = 7$, область определения функции задается неравенством $x < 2,5$. Знаки $f(x)$, т. е. $F'(x)$, схематически представлены на рисунке 35. Значит, $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума. Первообразная возрастает на луче $(-\infty; -2]$, на полуинтервале $[2; 2,5)$ и убывает на отрезке $[2; 2]$.

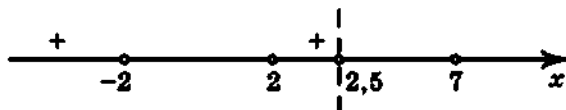


Рис. 35

20.46. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int \sin^2 x dx$; б) $\int \sin^4 x dx$.

Решение.

а) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C.$

б) $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$
 $= \frac{1}{4} \left(x - 2 \frac{\sin 2x}{2} + \int \cos^2 2x dx \right) =$
 $= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx \right) =$
 $= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \right) + C =$
 $= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$

20.47. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; б) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Решение.

а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4 dx}{\sin^2 2x} = -\frac{4 \operatorname{ctg} 2x}{2} + C = -2 \operatorname{ctg} 2x + C.$

б) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx =$
 $= -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C = -\frac{2}{\sin 2x} + C.$

§ 21. Определенный интеграл

21.23. Вычислить:

б) $\int_{-4}^0 (|x - 2| - |x + 3|) dx$; г) $\int_{-4}^4 (|x - 2| - |x + 3|) dx.$

Решение.

б) Если $-4 \leq x \leq -3$, то $|x - 2| - |x + 3| = (2 - x) + (x + 3) = 5$;
если $-3 \leq x \leq 0$, то $|x - 2| - |x + 3| = (2 - x) - (x + 3) = -2x - 1$.
Воспользовавшись свойством аддитивности интеграла, получим:

$$\int_{-4}^0 (|x - 2| - |x + 3|) dx = \int_{-4}^{-3} 5 dx + \int_{-3}^0 (-2x - 1) dx = 11.$$

г) Для вычисления

$$\int_{-4}^4 (|x - 2| - |x + 3|) dx$$

можно, как и в пункте б), воспользоваться свойством аддитивности, разбив отрезок $[-4; 4]$ на три части: $[-4; -3] \cup [-3; 2] \cup [2; 4]$. Но можно предложить довольно изящное геометрическое решение. Построим график кусочной функции $y = |x - 2| - |x + 3|$, $x \in [-4; 4]$ (рис. 36). Площади заштрихованных треугольников равны, но при вычислении интеграла численные значения площадей приходится брать с различными знаками. Значит, по отрезку $[-3; 2]$ интеграл равен нулю. Остались два прямоугольника, площадь одного из них равна 5, а другого 10, но вторую площадь при вычислении интеграла надо взять со знаком «минус». В итоге получаем -5 .

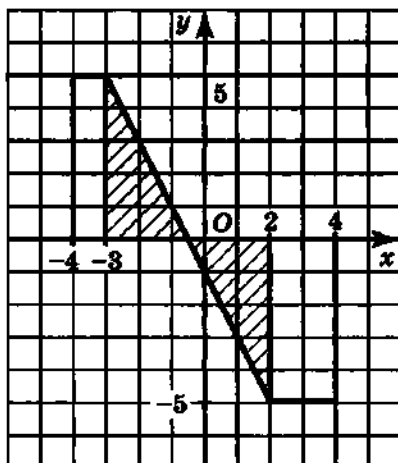


Рис. 36

21.30. б) Решить уравнение $\int_{-1}^x (4t^3 + 3t^2 - 4t - 4) dt = 9$.

Решение. В результате интегрирования получаем $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x + 1$, и задача сводится к решению уравнения четвертой степени $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$. Оно имеет легко угадываемые целые корни 2 и -2 . Разделив многочлен $x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8$ на $x^2 - 4$, получим квадратный трехчлен $x^2 + x + 2$, не имеющий действительных корней.

Ответ: ± 2 .

21.31. б) Сколько корней имеет уравнение $\int_0^x \sin t dt = 0,2x$?

Решение. Вычислив интеграл, получим $-\cos x + 1$, а потому задача сводится к решению уравнения $\cos x = 1 - 0,2x$. Построив в одной системе координат графики функций $y = \cos x$, $y = 1 - 0,2x$, обнаружим, что они имеют пять точек пересечения (рис. 37). Сомнения могут возникнуть лишь по поводу точки пересечения, которая лежит правее точки $x = 3\pi$. Чтобы убедиться в том, что она на самом деле существует, достаточно вычислить значение линейной функции $y = 1 - 0,2x$ в точке $x = 3\pi$. Имеем:

$$y(3\pi) = 1 - 0,6\pi > 1 - 0,6 \cdot 3,15 = -0,89 > -1 = \cos 3\pi.$$

Значит, в рассматриваемой точке ордината линейной функции больше ординаты косинуса, что и отражено на рисунке 37
 Ответ: 5.

21.35. 6) Решить уравнение

$$\int_3^t \left(\frac{1}{x-2} + 2x - 3 \right) dx = \ln(t-2) - t^3 + 6, \text{ где } t > 3.$$

Решение. Вычислив интеграл, получим уравнение

$$\ln(t-2) + t^2 - 3t = \ln(t-2) - t^3 + 6.$$

Область его определения задается неравенством $t > 2$. Далее задача сводится к решению уравнения $t^3 + t^2 - 3t - 6 = 0$, которое имеет единственный корень $t = 2$, не удовлетворяющий условию $t > 2$. Значит, исходное уравнение не имеет корней.

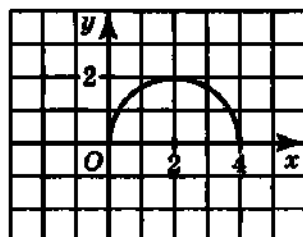


Рис. 38

21.38. а) Используя геометрические соображения, вычислить интеграл

$$\int_0^4 \sqrt{4x - x^2} dx.$$

Решение. Рассмотрим подинтегральную функцию

$$y = \sqrt{4x - x^2}.$$

Это уравнение можно преобразовать в виду $x^2 + y^2 - 4x = 0$ и далее $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Значит, график функции является полуокружностью радиусом 2 с центром в точке (2; 0) (рис. 38). Интеграл выражает площадь верхнего полукруга, она равна 2π .

21.55. 6) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x}, y = 3 - 2\sqrt{x}, 4x - 5y - 21 = 0.$$

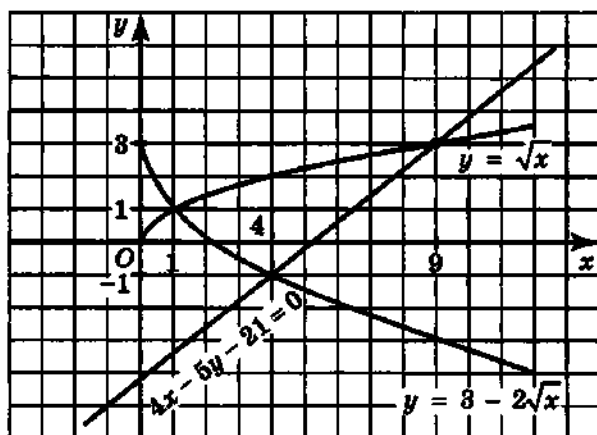


Рис. 39

Решение. Фигура представляет собой криволинейный треугольник с вершинами в точках $(1; 1)$, $(4; -1)$, $(9; 3)$ (рис. 39). Иначе,

$$S = \int_1^4 (\sqrt{x} - (3 - 2\sqrt{x}))dx + \int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{4x - 21}{5} \right) dx = 12\frac{2}{3}.$$

21.63. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 10 - x$, $x = 0$.

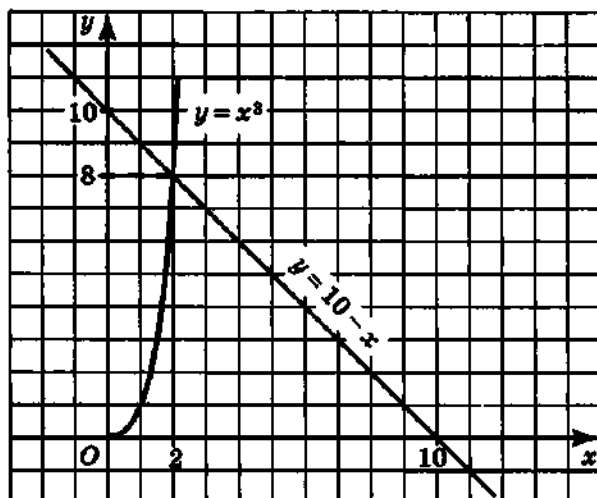


Рис. 40

Решение. Графики функций $y = x^2$ и $y = 10 - x$ пересекаются в точке (2; 8), поэтому (рис. 40) искомая площадь вычисляется следующим образом:

$$S = \int_0^2 (10 - x - x^2) dx = \left(10x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 14.$$

21.64. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = |x|$, $y = 2 - |x|$;

б) $y = |x + 1|$, $y = -(x - 1)^2 + 2$;

в) $y = |x| - 2$, $y = \frac{x}{2}$;

г) $y = -|x + 1| + 2$, $y = (x - 1)^2$.

Решение. а) Площадь заданной фигуры можно вычислить без использования интеграла. Речь идет о вычислении площади квадрата с диагональю $d = 2$ (рис. 41): $S = 0,5 \cdot d^2 = 2$.

б) Имеем (рис. 42):

$$S = \int_0^1 (-(x - 1)^2 + 2 - (x + 1)) dx = \frac{1}{6}.$$

в) Имеем (рис. 43):

$$S = \int_{-\frac{4}{3}}^0 \left(\frac{x}{2} - (-x - 2) \right) dx + \int_0^4 \left(\frac{x}{2} - (x - 2) \right) dx = 5\frac{1}{3}.$$

Здесь приходится учитывать два обстоятельства: во-первых, заданная фигура состоит из двух частей, поэтому применяется аддитивное свойство интеграла; во-вторых, для отыскания точек пересечения заданных линий следует решить уравнение $|x| - 2 = \frac{x}{2}$. Оно имеет два корня: $-\frac{4}{3}$ и 4.

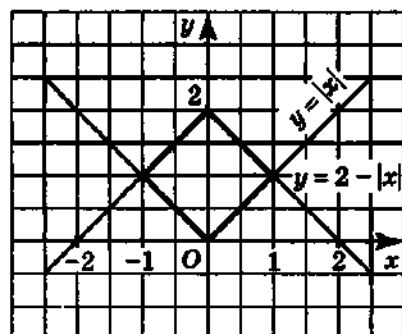


Рис. 41

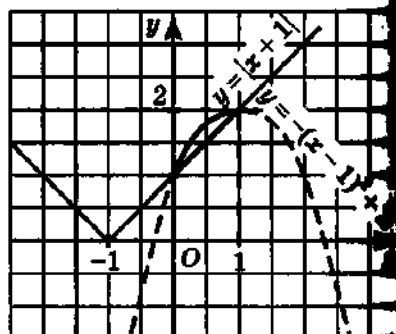


Рис. 42

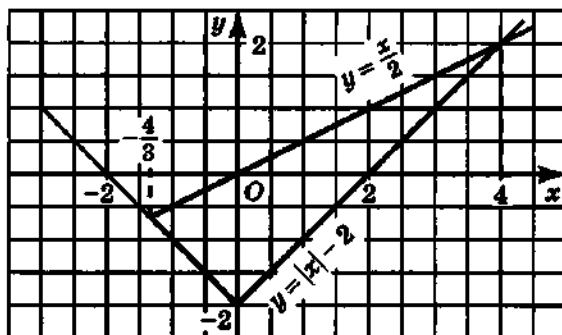


Рис. 43

г) Имеем (рис. 44):

$$S = \int_0^1 (1 - x - (x - 1)^2) dx = \frac{1}{6}.$$

21.67. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \sin 2x$, $y = \frac{16x^2}{\pi^2}$; в) $y = \cos x$, $y = \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)^2$;

б) $y = x^2 - 1$, $y = \cos \frac{\pi x}{2}$; г) $y = x^2 - 2x$, $y = \sin \frac{\pi x}{2}$.

Решение. а) Имеем (рис. 45):

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin 2x - \frac{16x^2}{\pi^2} \right) dx = \left(-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{16x^3}{3\pi^2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{6 - \pi}{12}.$$

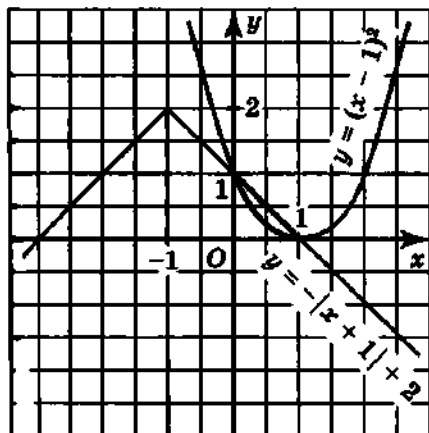


Рис. 44

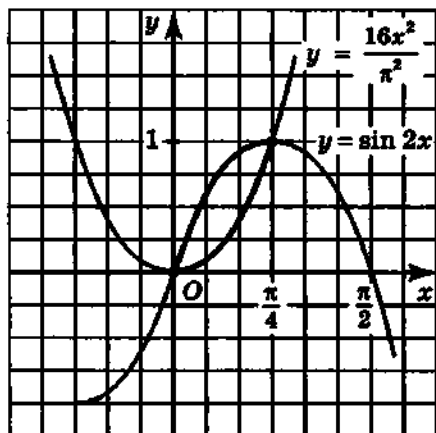


Рис. 45

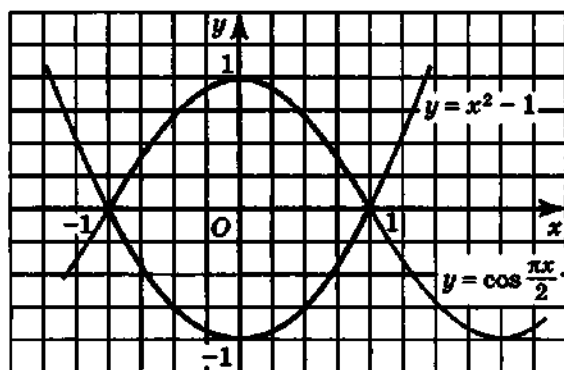


Рис. 46

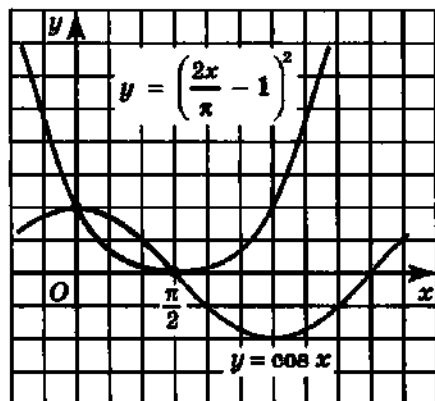


Рис. 47

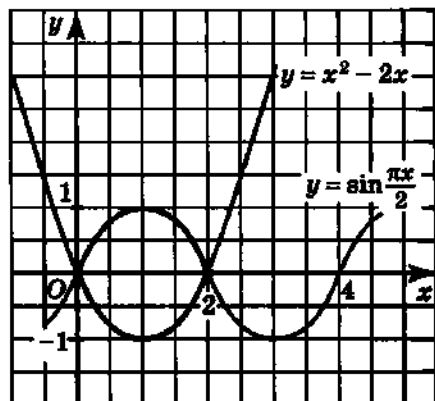


Рис. 48

б) Имеем (рис. 46):

$$S = \int_0^1 \left(\cos \frac{\pi x}{2} - x^2 + 1 \right) dx = \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4(\pi + 3)}{3\pi}.$$

в) Имеем (рис. 47):

$$S = \int_0^2 \left(\cos x - \left(\frac{2x}{\pi} - 1 \right)^2 \right) dx = \left(\sin x - \frac{4x^3}{3\pi^2} + \frac{2x^2}{\pi} - x \right) \Big|_0^2 = \frac{6 - \pi}{6}.$$

г) Имеем (рис. 48):

$$S = \int_0^2 \left(\sin \frac{\pi x}{2} - x^2 + 2x \right) dx = \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4(3 + \pi)}{3\pi}.$$

21.70. а) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$, касательной к ней в точке $x = 1$ и осью y .

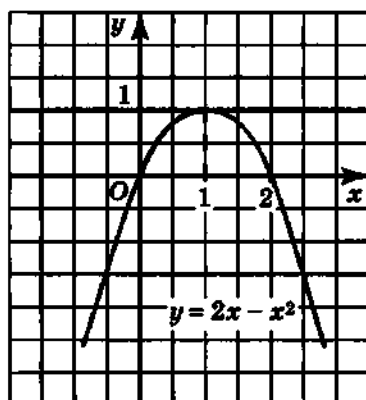


Рис. 49

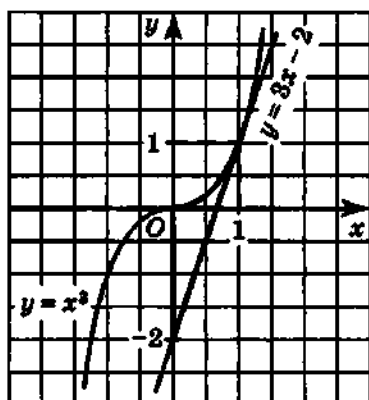


Рис. 50

Решение. Имеем (рис. 49):

$$S = \int_0^1 (1 - (2x - x^2)) dx = \frac{1}{3}.$$

21.72. а) Найти площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y = x^3$, касательной к ней в точке $x = 1$ и осью y .

Решение. Составим уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x = 1$:

$$y = 1^3 + 3 \cdot 1^2(x - 1),$$

$$y = 3x - 2.$$

Далее имеем (рис. 50):

$$S = \int_0^1 (x^3 - (3x - 2)) dx = \frac{3}{4}.$$

21.73. а) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3 - \frac{x^2}{2}$ и двумя касательными, проведенными к нему из точки на оси y так, что угол между касательными 90° .

Решение. Речь идет о вычислении площади криволинейного треугольника MBP (рис. 51) или, что то же самое, о нахождении удвоенной площади криволинейного треугольника DBP .

Составим уравнение прямой BP . Она образует с осью x угол 135° , значит, ее угловой коэффициент равен -1 . Следовательно, $y' = -1$, т. е.

$$\left(3 - \frac{x^2}{2}\right)' = -1,$$

$$-x = -1, x = 1.$$

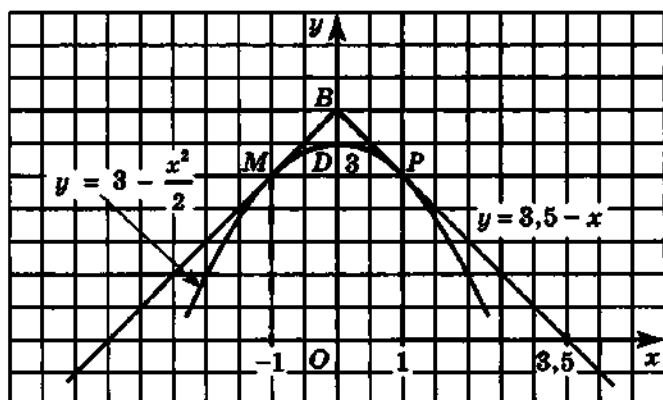


Рис. 51

Обычным образом составляем уравнение касательной к графику функции $y = 3 - \frac{x^2}{2}$ в точке $x = 1$, получаем $y = 3,5 - x$.

Далее имеем (рис. 51):

$$S = 2 \int_0^1 \left((3,5 - x) - \left(3 - \frac{x^2}{2} \right) \right) dx = \frac{1}{3}.$$

Аналогично решаются № 21.73, б) и 21.74.

21.75. а) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ и касательной к нему в точке $x = 3$.

Решение. Заданная функция имеет точку максимума (1; 5) и точку минимума (3; 1). Построим график этой функции (рис. 52). Касательная к нему в точке $x = 3$ параллельна оси абсцисс и имеет с графиком еще одну общую точку (0; 1). Значит,

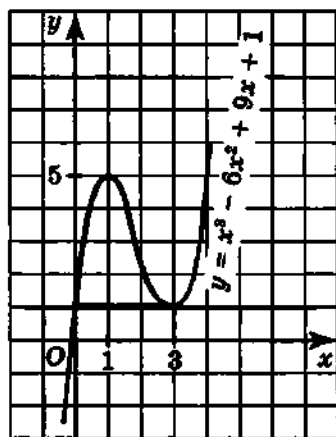


Рис. 52

$$S = \int_0^3 ((x^3 - 6x^2 + 9x + 1) - 1) dx = \frac{27}{4}.$$

21.76. а) При каком положительном значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$, равна $\frac{7}{8}$?

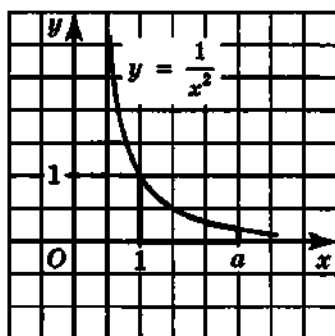


Рис. 53

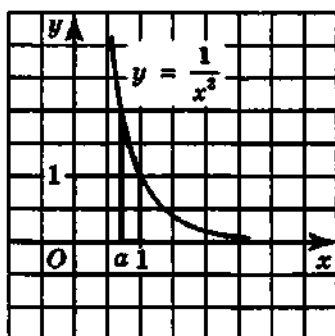


Рис. 54

Решение. Возможны два варианта: $a > 1$; $0 < a < 1$. В первом случае (рис. 53) получаем:

$$S = \int_1^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^a = 1 - \frac{1}{a}.$$

По условию $1 - \frac{1}{a} = \frac{7}{8}$, откуда находим: $a = 8$.

Во втором случае (рис. 54) получаем:

$$S = \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_a^1 = -1 + \frac{1}{a}.$$

По условию $-1 + \frac{1}{a} = \frac{7}{8}$, откуда находим $a = \frac{8}{15}$.

21.77. Доказать, что площадь S криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = ax^2 + bx + c$ и прямыми $x = \alpha$, $x = \beta$ ($\alpha < \beta$), $y = 0$ (рис. 55), можно найти по формуле Симпсона:

$$S = \frac{\beta - \alpha}{6} \left(y(\alpha) + y(\beta) + 4y\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right).$$

Решение.

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 + bx + c) dx = \left(\frac{a\beta^3}{3} + \frac{b\beta^2}{2} + c\beta \right) - \left(\frac{a\alpha^3}{3} + \frac{b\alpha^2}{2} + c\alpha \right) = \\ &= \frac{a}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{b}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) = \end{aligned}$$

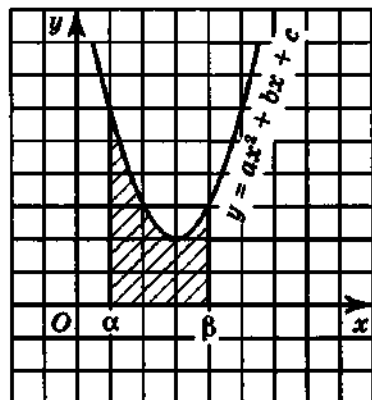


Рис. 55

$$\begin{aligned}
 &= (\beta - \alpha) \left(\frac{a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)}{3} + \frac{b(\beta + \alpha)}{2} + c \right) = \\
 &= \frac{\beta - \alpha}{6} (2a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c).
 \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta - \alpha}{6} \left(y(\alpha) + y(\beta) + 4y\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right) &= \frac{\beta - \alpha}{6} ((a\alpha^2 + b\alpha + c) + \\
 &+ (a\beta^2 + b\beta + c) + 4 \left(a \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + b \frac{\alpha + \beta}{2} + c \right)) = \\
 &= \frac{\beta - \alpha}{6} (2a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c).
 \end{aligned}$$

Формула Симпсона доказана.

ГЛАВА 5. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Этой новой для старшей школы теме посвящены четыре параграфа учебника и задачника. В § 22 речь идет о геометрических вероятностях, в § 23 повторяются и расширяются знания о независимых повторениях испытаний с двумя исходами, § 24 — это основы статистики, в § 25 на конкретном задачном материале происходит знакомство с практическими проявлениями закона больших чисел.

Напомним, что в 10 классе таких параграфов было три. В первом из них «Правило умножения. Перестановки и факториалы», кроме собственно правила умножения, основной акцент делался на вывод из этого правила двух основных комбинаторных тождеств: $P_n = n!$ для числа перестановок и 2^n для числа всевозможных подмножеств множества, состоящего из n элементов. При этом факториалы введены как удобный способ сокращенной записи ответа во многих конкретных комбинаторных задачах раньше самого понятия «перестановка». Во втором параграфе 10 класса «Выбор нескольких элементов. Биномиальные коэффициенты» рассматривались классические комбинаторные задачи, связанные с одновременным (или поочередным) выбором нескольких элементов из заданного конечного множества. Параграф заканчивался кратким знакомством с биномом Ньютона и треугольником Паскаля. Наиболее существенным и действительно новым для российской общеобразовательной школы был заключительный параграф «Случайные события и их вероятности». В нем была

рассмотрена классическая вероятностная модель (схема), разобраны формулы $P(A + B) + P(AB) = P(A) + P(B)$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ и способы их применения. Заканчивался параграф переходом к независимым повторениям испытания с двумя исходами. Это наиболее важная с практической точки зрения вероятностная модель (испытания Бернулли), имеющая значительное число приложений. Последний материал образовывал своего рода «мостик» между содержанием учебного материала в 10 и 11 классах.

Мы достаточно ясно отдаем себе отчет в том, что в конце 11 класса основное внимание большинства школьников, обучающихся математике на профильном уровне, сосредоточено, скорее всего, на подготовке к выпускным школьным и вступительным экзаменам в университеты. Поэтому, наряду с выполнением необходимых положений федерального компонента государственного стандарта общего образования по математике в его стохастической части, мы максимально старались сблизить качественно новый, стохастический, материал с привычным школьным курсом алгебры и начал математического анализа.

Вообще мы уверены, что, только двигаясь по пути реализации стохастики как достаточно обычного алгебраического материала, неразрывной интеграции новых общеобразовательных линий с уже устоявшимся школьным курсом, можно добиться надежных успехов в реальном процессе обучения. Мы считаем, что именно на пути укрепления межпредметных связей можно достичь надежных успехов при введении нового учебного раздела — стохастики. Рассмотрим с этой точки зрения учебный материал, изложенный в учебнике и задачнике 11 класса.

Само название «Вероятность и геометрия» (§ 22) связывает вместе новую тему «Вероятность» и стандартный школьный предмет «Геометрия». Со стохастической точки зрения мы продолжаем линию знакомства с различными вероятностными моделями и от схем с конечным числом элементарных исходов переходим к испытаниям с бесконечным числом исходов. Другими словами, мы действительно изучаем новый стохастический материал, знакомимся с новой постановкой вопросов в задачах. С другой стороны, при непосредственном изучении этой темы мы стараемся повторить и нахождение длин промежутков, площадей фигур, объемов тел, и решение неравенств, и графики функций, и формулу Ньютона — Лейбница. Тем самым в миниатюре происходит повторение и закрепление уже известных фактов и утверждений из курса алгебры и начал математического анализа.

Проиллюстрируем это положение на конкретном примере. Вот стандартная постановка вопроса о нахождении геометриче-

ской вероятности: «Какова вероятность того, что случайно выбранная из промежутка I точка окажется в промежутке J ?» Решение состоит в вычислении длины пересечения $I \cap J$ и делении этой длины на длину промежутка I . Мы с самого начала рассматриваем задачи (№ 22.1—22.5), в которых промежутки I и J даны не сами по себе, а получены в результате решения тех или иных неравенств. Приведем примеры.

22.1. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $x^2 < 9$. Найдите вероятность того, что оно является решением неравенства:

- а) $x^2 < 10$; б) $2x - 3 < 17$; в) $x^2 > 10$; г) $x^3 + 2x > 0$.

22.2. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $1 < |x - 3| < 5$. Найдите вероятность того, что оно является решением неравенства:

- а) $|x| < 2$; б) $|x - 6| < 2$; в) $|x| < 1$; г) $1 < |x - 6| < 2$

По звучанию и самой постановке вопроса — задачи новые, вероятностные, а по реальной технике решения и используемому багажу знаний — повторение темы «Решение неравенств». Аналогичен наш подход и в серии задач № 22.6—22.14 относительно плоских множеств. Фигуры на плоскости рассмотрены не отдельно, не сами по себе, а как решения (весьма несложных) упражнений и задач по планиметрии. Приведем пример.

22.6. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 5$ случайно выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

- а) ближе к прямой AB , чем к прямой CD ;
б) ближе к вершине A , чем к вершине C ;
в) ближе к прямой AB , чем к прямой BC ;
г) ближе к вершине A , чем к точке пересечения диагоналей.

При формальном подходе постановка вопроса в задаче, скажем в), звучала бы так: «...она расположена в треугольнике ABE , где AE — биссектриса угла ABC , $E \in BC$ ». Мы же предлагаем ученику самостоятельно проанализировать конкретную геометрическую ситуацию, сообразить, причем тут вообще биссектриса, и после этого заняться вычислениями. Вот еще один пример, в котором для решения новой по постановке вопроса задачи требуется проверить и закрепить свои знания по элементарной планиметрии в координатной плоскости.

22.9. На оси абсцисс случайным образом выбирают точку $B(x; 0)$, $-2 \leq x \leq 6$, и соединяют ее с фиксированной точкой $A(4; 4)$. Какова вероятность того, что угол наклона отрезка AB к положительному направлению оси абсцисс:

а) тупой; б) меньше 45° ; в) острый; г) больше 60° ?

В серии задач № 22.15—22.18 с этой точки зрения рассмотрены площади криволинейных фигур (трапеций), которые вычисляются по формуле Ньютона — Лейбница.

22.15. Точку случайным образом выбирают из фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 3$. Найдите вероятность того, что она лежит:

а) левее прямой $x = 1$; в) выше прямой $y = 4$;

б) правее прямой $x = 2$; г) ниже прямой $y = 1$.

На уровне самой технологии решения задачи, сформулированной таким образом, происходит закрепление пройденного ранее материала, ученики работают с простейшим «параболическим» треугольником, рассматривают его простейшие разрезания по вертикалям и горизонталям.

Заключительные задачи № 22.19—22.22 отличаются от предыдущих тем, что функцию, график которой ограничивает ту или иную криволинейную трапецию, следует первоначально получить, вывести из словесной формулировки задачи. Две из этих четырех задач подробно разобраны ниже.

§ 23 «Независимые повторения испытаний с двумя исходами» по сравнению с § 22 слабее связан с основным курсом алгебры и начал математического анализа. Основное его содержание составляет уже специфическая для теории вероятностей тема, которая, несомненно, является центральной при первом содержательном знакомстве с основами этой теории. Речь идет о естественном обобщении математической модели подбрасываний монеты. Имеется одно испытание, в котором возможны всего два исхода: «да» или «нет», плюс или минус, хороший случай или плохой случай, годится или не годится и т. п. Обобщенное название этих исходов было предложено еще в XVIII веке. В схеме Бернулли они называются так: «успех» и «неудача» (иногда — «неуспех»). Допустим, вы провели 100 независимых повторений такого испытания. Какова вероятность того, что среди всех 100 последовательных исходов ровно 47 оказались «успехами»; ровно 66 оказались «неудачами»; «успехов» было больше 13, но меньше 23 и т. п.? Я. Бернулли не только сформулировал проблему, но и дал ее решение.

ТЕОРЕМА (Бернулли). Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами «успех» и «неудача» находится по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность «успеха», а $q = 1 - p$ — вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Изучению и предметному знакомству с этой центральной в теории вероятностей схемой, теоремой и формулой как раз и посвящен § 23. Напомним, что пропедевтика этих понятий уже была проведена в учебнике (§ 49, примеры 5 и 6, теорема 3) и задачнике (№ 49.23—49.30) для 10 класса.

Задачи в § 23 сгруппированы следующим образом. Сначала идут четыре задачи (№ 23.1—23.4), в которых отрабатываются собственно понятия «успех» и «неудача» в различных конкретных ситуациях. В них следует по классической вероятностной схеме вычислить вероятность p «успеха» или вероятность $q = 1 - p$ «неудачи». Кроме того, требуется найти вероятность наступления хотя бы одного «успеха» в серии из двух или трех повторений. По существу, эти задачи являются повторением уже пройденного в 10 классе материала. Вот типичный пример.

23.1. Найдите вероятность «успеха» в каждом из следующих испытаний:

а) вытаскивание одной кости домино; появление дубля — «неудача»; б) вытаскивание одной кости домино; появление кости с суммой очков меньше 4 — «неудача»; в) вытаскивание одной карты из колоды в 36 карт; появление «пики» — «неудача»; г) вытаскивание одной карты из колоды в 36 карт; появление туза, короля или дамы — «неудача».

Следующая группа задач (№ 25.5—25.12) связана с закреплением умения применять формулу $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ в разнообразных вероятностных ситуациях. Для их решения практически всегда достаточно понять, чему равны в конкретной задаче переменные n , k , p , q и по формуле Бернулли вычислить нужную вероятность. Среди примеров — стандарты теории вероятностей: подбрасывания монеты, игральной кости, встречи команд, стрельба по мишени и т. п.

23.10. Стрелок не очень меток: вероятность поражения мишени при одном выстреле оценивается в 40 %. Оцените (в процентах) вероятности наступления следующих событий при пяти выстрелах этого стрелка:

а) в мишень попадут ровно 3 пули; б) в мишень не попадет ровно 1 пуля; в) мишень останется нетронутой; г) мишень будет поражена хотя бы раз.

Отдельное внимание следует уделить решению задачи № 23.12. Она по сюжету повторяет задачу № 23.5 про подбрасывания монеты, но итог следует подвести уже на качественно новом уровне, составив полную таблицу вероятностей исходов и графически изобразив полученные результаты при $n = 8$, $0 \leq k \leq 8$, $p = q = 0,5$. По существу, речь идет о таблице и графике распределения случайной величины, хотя сам термин «случайная величина» в нашем учебнике не вводится и, соответственно, не изучается. На наш взгляд, в средней школе вполне достаточно на предметном уровне ознакомиться с некоторыми классическими типами случайных величин и совсем не обязательно пытаться как-либо формулировать и формализовать это весьма сложное и новое понятие.

Затем идут четыре задачи № 23.13—23.16, возвращающие учащихся к теме «Вероятность и геометрия». Приведем пример.

23.15. Даны два концентрических шара радиусом 1 и 2 соответственно. В большем шаре независимым образом поочередно выбирают 3 точки. Найдите вероятность того, что:

а) все точки окажутся в меньшем шаре; б) вне меньшего шара окажется ровно одна точка; в) ни одна из точек не окажется в меньшем шаре; г) хотя бы одна точка окажется в меньшем шаре.

При решении этих задач происходит повторение и геометрического материала, и материала § 22, происходит закрепление изучаемой в § 23 темы. Три из этих задач разобраны во второй части этого пособия.

Наконец, четыре задачи № 23.17—23.20 параграфа связаны с нахождением наимвероятнейшего числа $k_{\text{наивер}}$ «успехов» в n испытаниях Бернулли. В учебнике достаточно полно и подробно произведен вывод соответствующей формулы. На практике часто удобен бывает следующий алгоритм действий.

Для того чтобы найти наимвероятнейшее число $k_{\text{наивер}}$ «успехов» в n испытаниях Бернулли с вероятностью «успеха», равной p , следует:

1) вычислить число np ;

2) от числа np на координатной прямой отложить q влево и p вправо;

3) целое число, лежащее на отрезке $[np - q; np + p]$ единичной длины и будет равно $k_{\text{наивер}}$; если таких целых чисел два, то $k_{\text{наивер}}$ может равняться любому из них.

Например, рассмотрим задачу.

23.17. В соответствии с техническими нормативами вероятность выпуска стандартной детали без дефектов оценивается в 95 %. Найдите наименее вероятное число бракованных деталей среди n выпущенных деталей: а) $n = 1119$.

«Успех» в этой задаче — это наличие брака. Его вероятность равна $p = 0,05$. Значит, $np = 55,95$, $[np - q; np + p] = [55,95 - 0,95; 55,95 + 0,05] = [55; 56]$. Поэтому $k_{\text{наименее}}$ может равняться 55 или 56. Примерно таков же уровень сложности подсчетов и в остальных задачах № 23.27—23.20.

При написании § 24, посвященного основам статистики, авторы испытывали определенные сложности. Дело в том, что, с одной стороны, сами по себе способы описания, преобразования и «чтения» информации — вещь принципиально важная для любого человека, получающего образование в средней школе. С другой стороны, детальное и тщательное знакомство и изучение новых для российской школы терминов и понятий, на наш взгляд, вряд ли вообще возможно. По крайней мере знакомство с несколькими зарубежными и отечественными пособиями по началам и элементам статистики показывает, что объем таких узкоспециальных пособий довольно часто превышает полный объем обычных учебников по математике и нет никакой реальной возможности включить всю статистическую «палитру» в имеющийся курс алгебры и начал математического анализа. По этой причине вынужденным является весьма серьезный отбор необходимого минимума. Мы сознательно решили ограничиться несколько расширенной и адаптированной версией материала статистического параграфа из нашего учебника «Алгебра—9». Дело в том, что предложить материала меньше, чем в этой книге, все равно невозможно: он абсолютно необходим просто для элементарного понимания дела. В то же время заметно превышать его вряд ли разумно в выпускном 11 классе. Так что для тех учеников, кто обучался в 9 классе по нашему учебнику, это будет закрепление пройденного материала на несколько повышенном уровне. А для тех, кто ранее вообще не был знаком с элементами статистики (а таких, может быть, заметное число), это изложение основ статистической обработки информации, не слишком отягощенное техническими деталями. Исключение составляет, быть может, понятие и подсчет дисперсии ряда данных. В зависимости от уровня подготовки конкретного класса задачи, связанные с таким подсчетом, могут быть пропущены. Для практических целей куда более полезно было бы познакомить учеников с вычислениями числовых характеристик ряда

данных на компьютере. Впрочем, это скорее задача для уроков информатики.

Особенностью изложения материала в нашем учебнике является введение термина *кратность* варианты. Этого термина нет в вузовских учебниках статистики. Поясним свою позицию на конкретном примере. Число 7 встретилось в последовательности

1, 3, 7, 2, 5, 7, 4, 9, 7, 2

ровно три раза. В статистике в таких случаях принято говорить, что «абсолютная частота варианты 7 равна трем, а ее относительная частота равна 0,3». Кроме того, во многих случаях при изложении основ статистики и вероятности говорят и об эмпирической частоте, и о статистической частоте, и просто о частоте случайного события. Получается 4—5 разных видов частот, большинство из которых — это числа от 0 до 1, а некоторые все же — натуральные числа. Мы серьезно опасаемся, что все эти термины перемешаются и получится сплошная «каша» (если к тому же еще вспомнить и про частоту колебаний из физики). По этой причине у нас в учебнике есть одна частота: та, которую принято называть относительной, а для абсолютной частоты мы выбрали термин *кратность*. Кратность — это число, показывающее, сколько именно раз встретилось одно числовое данное среди всего ряда данных измерения.

Вряд ли в этой части пособия стоит подробно останавливаться на содержании задач § 24. Технических сложностей, как мы надеемся, тут быть не должно, а большинство задач разобрано ниже. Основная линия всего статистического блока состоит в такой последовательности обработки информации: сначала ее упорядочивают и группируют, сгруппированные данные составляют в таблицы, по таблицам строят графики, иногда после этого вычисляют несколько простейших числовых характеристик (моду, среднее, размах и т. п.). Может быть, специального внимания заслуживают упражнения № 24.7—24.10. Здесь при решении задач по статистике и работе с таблицами распределения происходит повторение процентов и долей. Задачи № 24.11—24.16 составляют серию, в которой исследуются и анализируются результаты одного и того же испытания — получение оценок по русскому языку и по литературе учениками одного класса. Задачи № 24.17—24.20 напоминают аналогичные задания из задачника «Алгебра—9», только вопросы ставятся посложнее. В задачах № 24.19 и 24.20 для решения необходимо использование свойств дробно-линейной функции. Повторение этих свойств весьма важно, так как на вступительных экзаменах они довольно часто используются, а в основной школе их рассмотрение практически отсутствует.

Заключительный § 25 в учебнике набран петитом. Это означает, что мы не уверены в том, что материал этого параграфа в итоге всех «стохастических» нововведений непременно будет включен в учебные программы средней школы. Поэтому в настоящее время его можно рассматривать как дополнение к § 23, иллюстрацию того, как на самом деле в реальной практике используют теорему и формулу Бернулли. Оказывается, что та абсолютная точность, которую дает эта формула на практике, — вовсе не преимущество, а недостаток: приходится производить приближенные вычисления с использованием таблиц функций ϕ и Φ .

В первых шести задачах (§ 25.1—25.6) продолжается работа с самой формулой Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, закрепляется ранее пройденный материал. В задачах № 25.7—25.12 происходит знакомство с гауссовой функцией ϕ , точнее, с таблицей ее значений. Сначала (§ 25.7—25.9) идут простые упражнения на «чтение» этой таблицы, а после этого предложены примеры использования. Решения задач № 25.10—25.12 полностью приведены ниже. В серии из шести задач № 25.13—25.18 происходит аналогичное знакомство с функцией Φ . Приведем примеры.

25.16. Вероятность рождения мальчика примем равной 50 %. Найдите вероятность того, что среди 900 новорожденных будет:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| а) от 400 до 450 мальчиков; | в) от 430 до 470 девочек; |
| б) не менее 440 мальчиков; | г) не более 460 девочек. |

Две заключительные задачи носят практико-ориентированный характер, они иллюстрируют возможности использования гауссовых функций в конкретных и достаточно жизненных ситуациях. Например:

25.19. Известно, что из всех поступавших в университет абитуриентов в среднем 60 % набрали на экзаменах более 20 баллов. Какова вероятность того, что из 100 случайно выбранных абитуриентов более 20 баллов набрали: а) от 50 до 70 человек.

25.20. В большом десятиэтажном доме на каждом этаже живет примерно одинаковое количество жильцов. Какова вероятность того, что из 150 случайным образом опрошенных жильцов этого дома: а) на первом этаже проживает не менее 15 человек.

С методической точки зрения на примере подобных задач происходит формирование представления о конкретном характере таких явлений, как статистическая устойчивость и закон больших чисел. На наш взгляд, сформировать сколько-нибудь ясное представление об этих важнейших статистических зако-

нах, соответствующую «компетентность» невозможно только на словах или на поучительных историях: размахивание руками тут вряд ли поможет. А вот несколько самостоятельно проведенных вычислений (по таблицам или на компьютере) и подсчетов в конкретных ситуациях куда более точно проясняют суть дела. Поэтому, с нашей точки зрения, если уж и затевать в средней школе разговор про статистическую устойчивость и закон больших чисел, то все слова непременно должны быть подкреплены конкретными сюжетными задачами практической направленности. Без них значимость собственно вероятностной составляющей в стохастической линии при обучении математике резко снижается.

§ 22. Вероятность и геометрия

С технической точки зрения решение задач № 22.1—22.5 сводится к решению неравенств. После этого следует вычислить длину полученных промежутков и затем найти отношение этих длин. Поэтому, с одной стороны, здесь проверяются базовые умения решать алгебраические неравенства, а с другой стороны, происходит знакомство с нахождением простейших геометрических

вероятностей по формуле $P(A) = \frac{l(A)}{l(X)}$, где A — подмножество числового множества X , $l(A)$ и $l(X)$ — длина A и X , а $P(A)$ — вероятность того, что точка, случайным образом выбранная во множестве X , окажется принадлежащей подмножеству A .

22.3. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $\sqrt{x} < 10$. Найдите вероятность того, что оно:

- является решением неравенства $\sqrt{x} < 1$;
- принадлежит области определения функции $y = \ln(40x - 39 - x^2)$;
- является решением неравенства $\sqrt{x - 10} < 5$;
- принадлежит области значений функции

$$y = 0,5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1.$$

Решение. Множество X одинаково для всех пунктов задачи: $X = \{x: \sqrt{x} < 10\}$. Поэтому $X = [0; 100]$ и $l(X) = 100$.

а) Пусть $A = \{x: \sqrt{x} < 1\}$. Тогда $A = [0; 1]$, $l(A) = 1$ и $P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,01$.

$$\begin{aligned} \text{б) Пусть } A &= \{x: 40x - 39 - x^2 > 0\} = \\ &= \{x: (x - 1)(x - 39) < 0\} = (1; 39). \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } l(A) = 38 \text{ и } P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,38.$$

в) Решим сначала неравенство

$$\sqrt{x - 10} \leq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 10 > 0, \\ x - 10 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow 10 < x \leq 35.$$

$$\text{Значит, } A = [10; 35], l(A) = 25 \text{ и } P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,25.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } E\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) &= (-\infty; +\infty) \Rightarrow E\left(\sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = [-1; 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow E\left(0,5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = [-0,5; 0,5] \Rightarrow \\ &\Rightarrow E\left(0,5 \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1\right) = [0,5; 1,5]. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } A = E(y) = [0,5; 1,5], l(A) = 1 \text{ и } P(A) = \frac{l(A)}{l(X)} = 0,01.$$

Конечно, можно было использовать формулы приведения и двойного аргумента, но для нахождения $E(y)$, как мы видим, вполне можно обойтись и без них.

Ответ: а) 0,01; б) 0,38; в) 0,25; г) 0,01.

Методика решения задач № 22.6—22.8 примерно такая же, что и в задачах № 22.1—22.5, только вместо числовых множеств будут подмножества числовой плоскости, вместо длин — площади, а вместо формулы $P(A) = \frac{l(A)}{l(X)}$ — формула $P(A) = \frac{S(A)}{S(X)}$.

22.7. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 10$ случайно выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

- ближе к прямой AB , чем к прямой AD ;
- ближе к прямой AD , чем к каждой из прямых AB , CD ;
- расположена ближе к вершине A , чем к вершинам B и C ;
- ближе к прямой AB , чем к прямой AC .

Решение. Множество X одинаково для всех пунктов задачи. Это прямоугольник $ABCD$. Поэтому $S(X) = 50$.

а) Пусть AE — биссектриса угла A и $E \in BC$ (рис. 56). Тогда $AB = BE$, точки отрезка $[A; E]$ равноудалены от прямых AB и AD , а точки треугольника ABE (за исключением точек стороны AE) расположены к AB ближе, чем к AD . От включения (исключения) стороны площадь треугольника не меняется. Поэтому площадь треугольника ABE составляет четверть площади всего прямоугольника и искомая вероятность равна 0,25.

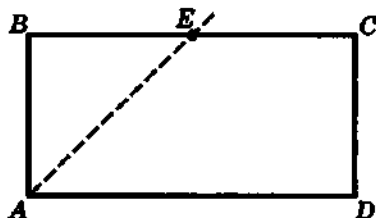


Рис. 56

Некоторые технические сложности могут быть связаны с тем, что в равенстве $P(A) = \frac{S(A)}{S(X)}$ буква A обозначает событие, а по

условию A — это вершина прямоугольника. Здесь стоит напомнить, что событие можно обозначить любой другой буквой, не встречающейся в геометрических обозначениях: K, M, V, Y . Впрочем, зачастую бывает удобно вообще никак не обозначать само событие, а просто вычислить площади двух нужных фигур, затем найти их отношение.

б) Если, продолжая рассуждения пункта а), провести еще и биссектрису DE (рис. 57), то точки треугольника AED (за исключением точек сторон AE и DE) расположены к AD ближе, чем к AB и CD . Площадь треугольника AED составляет половину площади всего прямоугольника и искомая вероятность равна 0,5.

в) Проведем серединный перпендикуляр a к стороне AB и серединный перпендикуляр b к диагонали AC (рис. 58). Они пересекутся в точке O — центре прямоугольника. Точки, лежащие к A ближе, чем к B , образуют полуплоскость ниже прямой a . Точки, лежащие к A ближе, чем к C , образуют полуплоскость левее прямой b . Значит, точки прямоугольника $ABCD$, расположенные ближе к вершине A , чем к вершинам B и C , образуют прямоугольную трапецию $AEOF$, где E — середина AB и $F = b \cap AD$.

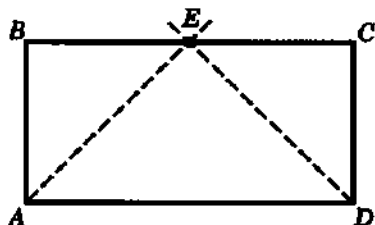


Рис. 57

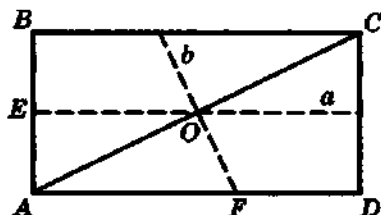


Рис. 58

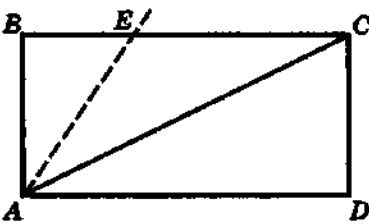
Найдем сторону AF из подобия треугольников AOF и ACD :

$$\frac{AF}{AO} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad AF = \frac{\sqrt{5}}{2} AO = \frac{\sqrt{5}}{4} AC = \frac{\sqrt{5}}{4} \sqrt{5} CD = 1,25 \quad CD = 6,25.$$

Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{S_{ABOF}}{S_{ABCD}} = \frac{0,5 \cdot AE \cdot (EO + AF)}{50} = \frac{0,5 \cdot 2,5 \cdot (5 + 6,25)}{50} = \frac{2,5 \cdot 11,25}{100} = \frac{112,5}{4 \cdot 100} = 0,28125.$$

г) Проведем биссектрису AE угла BAC , $E \in BC$ (рис. 59). Тогда искомая вероятность равна



$$\frac{S_{ABE}}{S_{ABCD}} = \frac{0,5 \cdot AB \cdot BE}{AB \cdot BC} = 0,5 \cdot \frac{BE}{BC}.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$ и, значит,

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BE}{BE + EC} = \frac{AB}{AB + AC}.$$

Рис. 59

Так как по условию $AC = \sqrt{5} AB$, то искомая вероятность равна $P = \frac{1}{2(1 + \sqrt{5})} = 0,1545$.

Ответ: а) 0,25; б) 0,5; в) 0,28125; г) 0,1545.

В задачах № 22.9—22.14 плоские (двумерные) множества так или иначе связаны или с линейными (одномерными), или с конечными множествами. Например, в задаче № 22.11 происходит повторение, с одной стороны, уравнений прямых на плоскости, с другой стороны, простейшего перебора вариантов и правил умножения.

22.11. Коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$ случайным образом выбираются из множества $\{-5, -4, -1, 0, 1, \dots, 4, 5\}$. Найдите вероятность того, что эта прямая:

- пересекает ось ординат;
- пересекает ровно две координатные четверти;
- не пересекает ось абсцисс;
- не пересекает вторую координатную четверть.

(Считать, что точки осей координат не принадлежат ни одной четверти.)

Решение. Коэффициенты a и b выбираются независимо друг от друга, и для выбора каждого коэффициента имеется ровно 11 вариантов. По правилу умножения число N всех возможных выборов пар коэффициентов равно 11^2 .

а) Любая прямая $y = ax + b$ пересекает ось ординат. А именно в точке $(0; b)$. Значит, мы имеем дело с достоверным событием, т. е. вероятность равна единице.

б) Если прямая пересекает оси координат в двух различных точках, то эта прямая пересекает три координатные четверти. Прямая $y = 0$ вообще не пересекает координатные четверти. Поэтому указанному условию удовлетворяют или горизонтальные прямые $y = 0$ $x + b$, $b \neq 0$, или же прямые $y = ax + 0$, $a \neq 0$, проходящие через начало координат. Прямых первого и второго типа по 10 штук, и нет прямых, которые одновременно принадлежат и первому, и второму типу. Значит, всего таких прямых 20.

Вероятность равна $\frac{20}{121}$ 0,165.

в) Ось абсцисс не пересекают только горизонтальные прямые $y = 0$ $x + b$, $b \neq 0$. Вероятность равна $\frac{10}{121}$ 0,083.

г) Прямая $y = ax + b$ пересекает или не пересекает вторую четверть в зависимости от знаков коэффициентов. Соберем все данные в таблицу.

Знаки a и b	Пересекает ли вторую четверть	Число прямых, удовлетворяющих условию
$a = 0$	Да	0
$a = 0, b > 0$	Да	0
$a = 0, b < 0$	Нет	6
$a > 0, b > 0$	Да	0
$a > 0, b < 0$	Нет	5 5 = 25
$a < 0, b = 0$	Нет	5

Вероятность равна $\frac{36}{121}$ 0,297.

Ответ: а) 1; б) 0,165; в) 0,083; г) 0,297.

22.13. Случайным образом выбирают два решения x_1 и x_2 неравенства $|x - 2| < 2$ и точку $(x_1; x_2)$ отмечают на координатной плоскости. Найдите вероятность того, что:

- оба решения не больше 2;
- хотя бы одно из решений не больше 2;
- сумма этих решений больше 3;

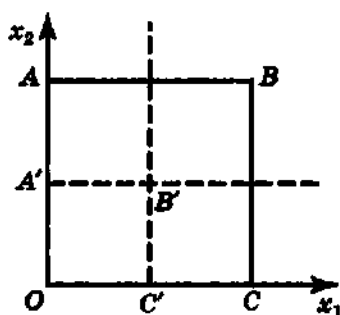


Рис. 60

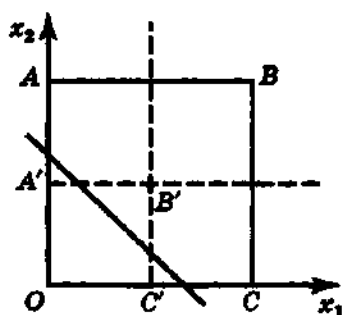


Рис. 61

г) x_1 и x_2 отличаются друг от друга (по модулю) не более чем на 1.

Решение. Сначала решим неравенство

$$|x - 2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

Значит, точку $(x_1; x_2)$ произвольно выбирают из квадрата $OABC$, где $O(0; 0)$, $A(0; 4)$, $B(4; 4)$, $C(4; 0)$ (рис. 60). Его площадь равна 16.

а) В этом случае $0 < x_1 < 2$ и $0 < x_2 < 2$, т. е. точка $(x_1; x_2)$ лежит в квадрате $OA'B'C'$, где $O(0; 0)$, $A'(0; 2)$, $B'(2; 2)$, $C'(2; 0)$. Так как $S_{OA'B'C'} = 0,25$, S_{OABC} , то вероятность равна 0,25.

б) Неравенство $0 < x_1 < 2$ геометрически означает, что точка квадрата $OABC$ лежит на прямой $B'C'$ или левее нее (рис. 61). Неравенство $0 < x_2 < 2$ геометрически означает, что точка квадрата $OABC$ лежит на прямой $A'B'$ или ниже нее. Нам нужно, чтобы выполнялось хотя бы одно из этих неравенств. Геометрически это означает, что нам нужно объединение двух множеств. Площадь такого объединения составляет три четверти площади всего квадрата. Вероятность равна 0,75.

в) Сначала нарисуем прямую $x_1 + x_2 = 3$. Она расщепит квадрат на две части. Для точек нижнего треугольника верно неравенство $x_1 + x_2 < 3$, а для точек верхней части — нужное нам неравенство

$x_1 + x_2 > 3$. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2$ от площади

квадрата $OABC$. Вероятность равна $1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} = 0,719$.

г) Сначала нарисуем две прямые: $x_2 = x_1 + 1$ и $x_2 = x_1 - 1$ (рис. 62). Они расщепят квадрат на три части. Для точек нижнего треугольника верно неравенство $x_2 < x_1 - 1$, для точек верхнего треугольника верно неравенство $x_2 > x_1 + 1$, а нам нужна средняя

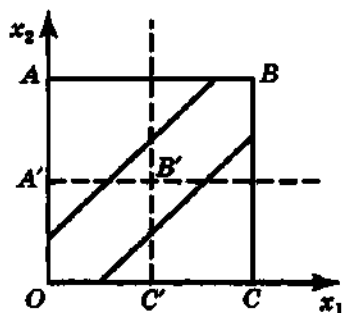


Рис. 62

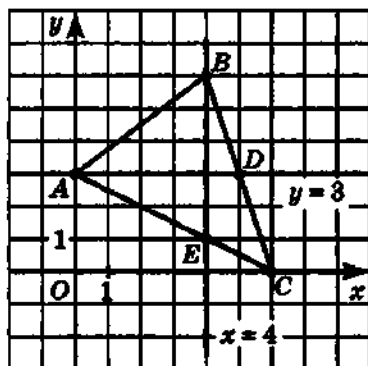


Рис. 63

часть: в ней $|x_2 - x_1| < 1$. Так как площадь отсекаемых треугольников в сумме равна $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ от площади квадрата $OACB$, то искомая вероятность равна $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0,4375$.

Ответ: а) 0,25; б) 0,75; в) 0,719; г) 0,4375.

22.14. На координатной плоскости даны точки $A(0; 3)$, $B(4; 6)$, $C(6; 0)$ (рис. 63). В треугольнике ABC случайным образом выбирают точку. Найдите вероятность того, что она расположена:

- а) ниже прямой $y = 3$;
- б) правее прямой $x = 4$;
- в) ближе к прямой AC , чем к прямой AB ;
- г) ближе к прямой AC , чем к прямой BC .

Решение. S_{ABC} можно найти по-разному. Самое неразумное — вычислить длины всех сторон и потом применить формулу Герона. Куда проще из площади квадрата $[0; 6] \times [0; 6]$ вычесть площади трех прямоугольных треугольников с вершинами прямых углов в точках $(0; 0)$, $(0; 6)$, $(6; 6)$. Получится $S_{ABC} = 36 - 0,5 (6 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = 15$.

а) Пусть D — точка пересечения прямой $y = 3$ и стороны BC . Тогда $BD = DC$ и поэтому $S_{ADC} = 0,5 S_{ABC}$. Вероятность равна 0,5.

б) Пусть E — точка пересечения прямой $x = 4$ и стороны AC . Тогда $AE : EC = 4 : 2 = 2$, т. е. сторона EC составляет треть стороны AC . Поэтому $S_{BEC} = \frac{1}{3} S_{ABC}$. Вероятность равна $\frac{1}{3}$.

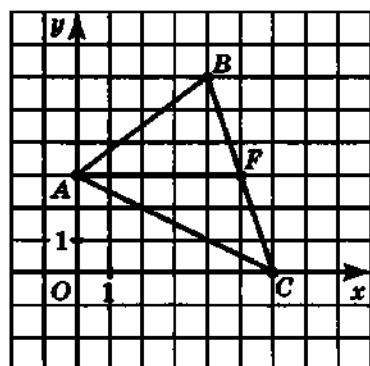


Рис. 64

в) Пусть AF — биссектриса угла BAC (рис. 64). Тогда точки треугольника AFC (без точек стороны AF) ближе к AC , чем к AB . Так как

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}, \text{ то}$$

$$P = \frac{S_{AFC}}{S_{ABC}} = \frac{0,5 \cdot FC \cdot h}{0,5 \cdot BC \cdot h} = \frac{FC}{BF + FC} = \frac{AC}{AB + AC} = \frac{\sqrt{36 + 9}}{\sqrt{16 + 9} + \sqrt{36 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{5} + 3} \approx 0,573.$$

г) Решение аналогично пункту в), только проводить следует биссектрису угла BCA .

Ответ: а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$; в) 0,573; г) $\frac{3}{2\sqrt{2} + 3} \approx 0,515$.

Следующие четыре задачи № 22.15—22.18 связаны с площадями криволинейных фигур, для вычисления которых уже не хватает элементарной планиметрии, а приходится использовать формулу Ньютона — Лейбница. Сложность задач возрастает по порядку номеров. Последняя задача № 22.18 является к тому же задачей с параметром.

22.18. Найдите значение параметра a , если известно, что вероятность указанного события равна 0,5:

а) точка фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 1$, лежит левее прямой $x = a$;

б) точка фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x^2}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = 2$, лежит ниже прямой $y = a$;

в) точка фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = 2$, лежит левее прямой $x = a$;

г) точка фигуры, ограниченной осью ординат, прямой $y = 2$ и графиком функции $y = |x - 1|$, лежит правее прямой $x = a$.

Решение. а) Сначала найдем площадь всей фигуры:

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Затем найдем площадь части этой фигуры, ограниченной справа прямой $x = a$:

$$S(a) = \int_0^a x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

По условию $0,5 P = \frac{S(a)}{S} = a^3$. Значит, $a = \sqrt[3]{0,5} = 2^{-\frac{1}{3}}$.

б) Сначала найдем площадь всей фигуры:

$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

Затем найдем площадь части этой фигуры, лежащей ниже прямой $y = a$, $0 < a < 1$. Эта прямая пересекает график функции в точке $(a^{-0,5}; a)$. Нужную площадь найдем как сумму площади прямоугольника $\{(x; y): 1 \leq x \leq a^{-0,5}, 0 \leq y \leq a\}$ и криволинейной трапеции $\{(x; y): a^{-0,5} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^{-2}\}$:

$$\begin{aligned} S(a) &= a(a^{-0,5} - 1) + \int_{a^{-0,5}}^2 \frac{dx}{x^2} = (\sqrt{a} - a) + \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{a^{-0,5}}^2 \\ &= (\sqrt{a} - a) - 0,5 + \sqrt{a}. \end{aligned}$$

По условию $0,5S = 0,25 = S(a)$. Значит,

$$0,25 = (\sqrt{a} - a) - 0,5 + \sqrt{a},$$

$$a - 2\sqrt{a} + 0,75 = 0, \quad (\sqrt{a} - 1)^2 = 0,25, \quad a = 0,25.$$

в) Будем действовать так же, как и в пункте а):

$$S = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

$$S(a) = \int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a - \ln 1 = \ln a = 0,5S = 0,5 \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

Значит, $a = \sqrt{2}$.

г) Указанная фигура является четырехугольником $ABCD$, где $A(0; 1)$, $B(0; 2)$, $C(3; 2)$, $D(1; 0)$ (рис. 65). Его площадь S удобнее найти как разность $S_{EDC} - S_{EAB}$, где E — точка пересечения прямых AD и BC :

$$\begin{aligned} S &= 0,5(DC^2 - AB^2) = 0,5(8 - 1) = \\ &= 3,5. \end{aligned}$$

Вертикаль $x = a$, делящая фигуру на равновеликие части, очевидно, расположена правее вертикали $x = 1$, т. е. $a > 1$. Обозначим F и G

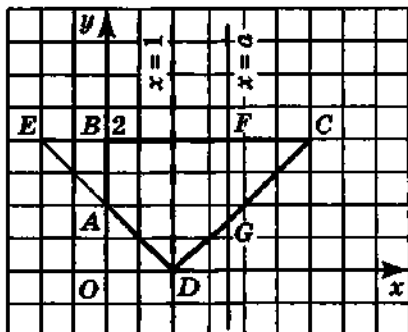


Рис. 65

точки пересечения прямой $x = a$ со сторонами BC и CD . Тогда по условию $S_{FGC} = 0,5S$. С другой стороны, треугольник FGC — прямоугольный с катетами $FG = FC = 3 - a$. Значит,

$$0,5S = 0,5(3 - a)^2, \quad 3,5 \quad (3 - a)^2, \quad a = 3 - \sqrt{3,5}.$$

Ответ: а) $2^{-\frac{1}{2}}$; б) 0,25; в) $\sqrt{2}$; г) $3 - \sqrt{3,5}$.

Заключительные задачи № 22.19—22.22 параграфа носят смешанный характер. Задачи № 22.19, 22.20 по геометрической конструкции напоминают задания С2 из ЕГЭ—2003. В задаче № 22.21 повторяется и формула корней квадратного уравнения, и строится геометрическая модель, и вычисляются простейшие определенные интегралы. Задача № 22.22 продолжает тему из примера 3 § 22 учебника.

22.20. Случайным образом на координатной плоскости xOy выбирают точку $P(x; y)$, $0 < x < 4$, $0 < y < 2$. Отрезок OP является диагональю прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Какова вероятность того, что площадь этого прямоугольника:

а) больше 9; б) меньше 10; в) меньше 2; г) больше 4?

Решение. а) Так как $0 < x < 4$, $0 < y < 2$, то $xy < 8 < 9$, т. е. площадь такого прямоугольника никогда не будет больше 9. Событие невозможно, его вероятность равна нулю.

б) Так как $0 < x < 4$, $0 < y < 2$, то $xy < 8 < 10$, т. е. площадь такого прямоугольника всегда будет меньше 10. Событие достоверно, его вероятность равна единице.

в) Проведем кривую $xy = 2$, т. е. $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$. Это ветвь гиперболы. Она пересекает границу прямоугольника $\{(x; y): 0 < x < 4, 0 < y < 2\}$ в точках $(1; 2)$ и $(4; 0,5)$ (рис. 66).

Площадь прямоугольника равна 8, а площадь его части, расположенной ниже ветви гиперболы, равна

$$1 \quad 2 + \int_1^4 \frac{2dx}{x} = 2 + 2(\ln 4 - \ln 1) = 2(1 + \ln 4).$$

Значит, искомая вероятность равна $0,25(1 + \ln 4)$.

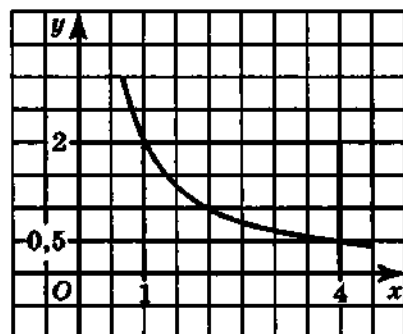


Рис. 66

г) Решение аналогично пункту в), только надо рисовать гиперболу $y = \frac{4}{x}$, $x > 0$, и считать площадь части прямоугольника $\{(x; y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$ выше нее.

Ответ: а) 0; б) 1; в) $0,25(1 + \ln 4)$; г) $0,5(1 - \ln 2)$.

22.22. Отрезок единичной длины наудачу разбили на три отрезка. Какова вероятность того, что длина каждого отрезка будет:

а) больше 0,34; б) больше 0,25; в) меньше 0,32; г) меньше 0,5?

Решение. В пунктах а) и в) эти события невозможны. В пункте а) сумма длин трех отрезков больше 3 $0,34 > 1$, а в пункте в) эта сумма меньше 3 $0,32 < 1$. Вероятности равны нулю.

б) Геометрическая модель описана в примере 3 § 22 учебника. Она состоит в выборе произвольной точки $(x; y)$ треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$ (рис. 67). При этом нужное нам событие произойдет, если $x > 0,25$, $y > 0,25$ и $1 - x - y > 0,25 \Leftrightarrow x + y < 0,75$, т. е. если точка окажется внутри треугольника, ограниченного прямыми $x = 0,25$, $y = 0,25$, $x + y = 0,75$.

Нетрудно видеть, что этот треугольник с коэффициентом 0,25 подобен треугольнику с вершинами $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$. Значит, отношение их площадей, т. е. искомая вероятность, равно $0,25^2 = 0,0625$.

г) Этот пункт является переформулировкой примера 3 § 22 учебника. Для его решения достаточно нарисовать прямые $x = 0,5$, $y = 0,5$, $x + y = 0,5$ (рис. 68) и увидеть, что площадь ограниченного ими треугольника составляет четверть площади всего треугольника.

Ответ: а) 0; б) 0,0625; в) 0; г) 0,25.

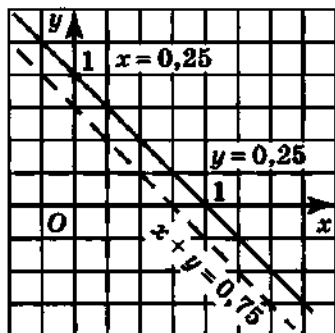


Рис. 67

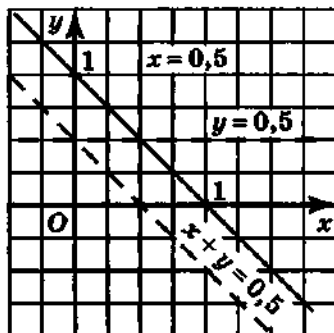


Рис. 68

§ 23. Независимые повторения испытаний с двумя исходами

Первая серия задач № 23.1—23.4 относится к двум классическим ситуациям, встречающимся в вероятностных задачах: извлечение костей домино и извлечение игральных карт из колоды. В каждом из пунктов а), б), в), г) этих задач рассматривается, соответственно, одно из четырех испытаний или повторения этих испытаний. Задача № 23.1 просто повторяет материал 10 класса (§ 49) с комбинаторным вычислением вероятности по классическому определению. Задача № 23.2 (23.4) — просто двукратное (трехкратное) «повторение» задачи № 23.1. В задаче № 23.3 продолжающей задачу № 23.2, отрабатывается умение вычислять вероятность события, начиная с нахождения вероятности противоположного события. Во всех случаях основным новым моментом является привыкание к новой терминологии — понятиям «успех» и «неудача» в испытаниях с двумя исходами.

23.1. Найдите вероятность «успеха» в каждом из следующих испытаний:

а) вытаскивание одной кости домино; появление дубля — «неудача»;

б) вытаскивание одной кости домино; появление кости с суммой очков меньше 4 — «неудача»;

в) вытаскивание одной карты из колоды в 36 карт; появление «пики» — «неудача»;

г) вытаскивание одной карты из колоды в 36 карт; появление туза, короля или дамы — «неудача».

23.2. Каждое из испытаний № 23.1 повторили дважды. Найдите вероятность двукратного появления «успеха» в каждом из случаев а), б), в), г).

23.3. В условиях № 23.2 найдите вероятность появления хотя бы одного «успеха» в каждом из случаев а), б), в), г).

Решение. а) В данном случае $p = 0,75$, $q = 0,25$, так как из 28 костей домино имеется 7 дублей. Обозначим A событие, состоящее в появлении хотя бы одного «успеха» среди двух повторений вытаскивания. Тогда противоположное событие \bar{A} заключается в том, что «успехов» не было вовсе, т. е. оба раза был вытащен дубль. Вероятность $P(\bar{A})$ события \bar{A} вычисляется по формуле теоремы Бернулли $P(\bar{A}) = C_2^0 p^0 q^2$, а вероятность $P(A)$ вычисляется по формуле $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Итак,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - C_2^2 p^0 q^2 = 1 - 0,25^2 = 1 - 0,0625 = 0,9375.$$

б) Тут «неудача» — это выпадение костей 0 0, 1 0, 1 1, 2 0, 2 1, 3 0. Значит, $q = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$, $p = \frac{11}{14}$. По той же формуле, что и в пункте а), получаем:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - C_2^2 p^0 q^2 = 1 - \frac{9}{196} = \frac{187}{196} = 0,9541.$$

в) Среди 36 игральные карты есть ровно 9 «пик». Значит, вероятность появления «пики» при одном вытаскивании, т. е. вероятность q «неудачи», равна 0,25. Далее вычисления такие же, как и в пункте а).

г) Среди 36 игральные карты имеется по 4 туза, короля, дамы, т. е. «неудачными» являются 12 карт из 36. Поэтому $q = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ и вероятность появления хотя бы одного «успеха» при двукратном повторении испытания равна $1 - C_2^2 p^0 q^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Ответ: а) 0,9375; б) 0,9541; в) 0,9375; г) $\frac{8}{9}$.

Серия задач № 23.5—23.12 посвящена отработке формулы $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ в других игровых ситуациях: бросаниях монеты, бросаниях игральные костей, встречах спортивных команд. В каждой из этих задач достаточно аккуратно выписать значения n , k , p , q и по указанной формуле подсчитать нужную вероятность. Заключительная задача № 23.12 по сюжету повторяет начальную задачу № 23.5, но итог следует подвести уже на качественно новом уровне, графически отобразив все ситуации, возможные при $n = 8$, $0 \leq k \leq 8$, $p = q = 0,5$.

23.8 Хоккейные команды А и Б играют в финальной стадии play-off. Шансы на победу команды А в отдельной встрече оцениваются в 40 %. Какова вероятность того, что после четырех встреч результат А : Б будет: а) 0 : 4; б) 2 : 2; в) 3 : 1; г) в пользу команды А?

Решение. «Успехом» в отдельной встрече назовем выигрыш команды А. Тогда во всех пунктах а) — г) $n = 4$, $p = 0,4$, $q = 0,6$.

а) Здесь одни «неудачи». Вероятность равна

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,6^4 = 0,1296.$$

б) Здесь ровно два «успеха». Вероятность равна

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0,24^2 = 0,3456.$$

в) Здесь ровно три «успеха». Вероятность равна

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot 0,064 \cdot 0,6 = 0,1536.$$

г) Тут возможны два случая. Либо итог после четырех встреч будет 3 1, либо он будет 4 0 в пользу команды А. Эти два итога — несовместные события. Поэтому вероятность суммы этих итогов равна сумме их вероятностей. При этом одно слагаемое уже посчитано в пункте в). Итак, вероятность равна

$$P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q + C_4^4 p^4 q^0 = p^3(4q + p) = 0,064 \cdot 2,8 \approx 0,1792.$$

Ответ: а) 0,1296; б) 0,3456; в) 0,1536; г) 0,1792.

В задачах № 23.13—23.16, с одной стороны, продолжается основная в этом параграфе тема нахождения вероятности по теореме Бернулли. С другой стороны, ситуации взяты геометрического характера, т. е. происходит повторение и закрепление материала предыдущего параграфа о геометрических вероятностях. Можно предположить, что основные технические сложности тут будут связаны именно с геометрией, а не с вычислением по формуле Бернулли.

23.13. Вершины квадрата лежат на сторонах правильного треугольника. В треугольнике независимым образом поочередно выбирают 4 точки. Найдите вероятность того, что: а) все точки

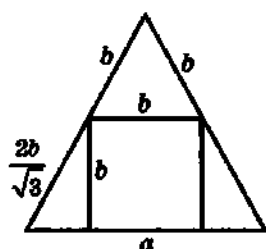


Рис. 69

окажутся в квадрате; б) в квадрате и вне квадрата окажется поровну точек; в) ни одна из точек не окажется в квадрате; г) хотя бы одна точка окажется в квадрате.

Решение. «Успехом» в отдельном испытании назовем попадание выбранной точки в квадрат. Найдем вероятность p «успеха». Пусть a — длина стороны правильного треугольника, а b — длина стороны «вписанного» квадрата (рис. 69). Тогда

$$a = b + \frac{2b}{\sqrt{3}} = b \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad p = \frac{S_{\text{квадр}}}{S_{\text{треуг}}} = \frac{b^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{12}{\sqrt{3} (2 + \sqrt{3})^2} = \frac{12}{\sqrt{3} (7 + 4\sqrt{3})} = \frac{12}{12 + 7\sqrt{3}} \approx 0,4974,$$

$$q \approx 0,5026.$$

а) Здесь одни «успехи». Вероятность равна

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 \approx 0,4974^4 \approx 0,0612.$$

б) Здесь два «успеха». Вероятность равна

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \quad (0,4974 \quad 0,5026)^2 \quad 0,375.$$

в) Здесь одни «неудачи». Вероятность равна

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 \quad 0,5026^4 \quad 0,0638.$$

г) Это событие противоположно событию из пункта в). Его вероятность равна 0,9362.

Ответ: а) 0,0612; б) 0,375; в) 0,0638; г) 0,9362.

23.14. Плоскость, проходящая через концы трех ребер куба, выходящих из одной вершины, отсекает от куба треугольную пирамиду. В кубе независимым образом поочередно выбирают три точки. Найдите вероятность того, что: а) все точки окажутся вне пирамиды; б) в пирамиде окажется ровно одна точка; в) ровно одна точка окажется вне пирамиды; г) хотя бы одна точка окажется вне пирамиды.

Решение. «Успехом» в отдельном испытании назовем попадание выбранной точки в пирамиду. Найдем вероятность p «успеха». Пусть a — длина стороны куба. Тогда площадь основания отсекаемой пирамиды равна половине площади грани куба, а высота пирамиды равна ребру куба. Значит, объем пирамиды составляет одну шестую объема куба, т. е. $p = \frac{1}{6}$.

а) Здесь одни «неудачи». Вероятность равна

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \quad 0,5787.$$

б) Здесь один «успех». Вероятность равна

$$P_3(1) = C_3^1 p q^2 = 3 \left(\frac{25}{216}\right) \quad 0,3472.$$

в) Здесь одна «неудача». Вероятность равна

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \left(\frac{5}{216}\right) \approx 0,0694.$$

г) Это событие противоположно событию, при котором все точки лежат в пирамиде, т. е. тому, что произойдет три «успеха». Его вероятность равна $1 - p^3 = \frac{215}{216} \approx 0,9953$.

Ответ: а) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,5787$; б) 0,3472; в) 0,0694; г) 0,9953.

23.16. Даны две concentрических окружности с радиусами 1 и 2 соответственно. На меньшей окружности отмечена точка P . В кольце между окружностями наудачу выбраны точки A и B .

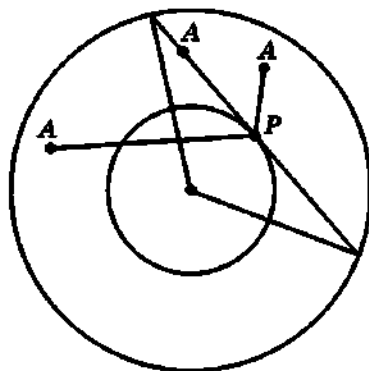


Рис. 70

Найдите вероятность того, что: а) отрезок AP имеет с меньшей окружностью только одну общую точку P ; б) отрезки AP и BP пересекают меньшую окружность в точках, отличных от точки P ; в) хотя бы один из отрезков AP и BP пересекает меньшую окружность в точке, отличной от точки P ; г) оба отрезка AP и BP имеют с меньшей окружностью только одну общую точку P .

Решение. а) Проведем хорду большей окружности, которая касается меньшей окружности в точке P

(рис. 70). Центральный угол, опирающийся на нее, равен 120° , а ее длина равна $l = 2\sqrt{3}$. Эта хорда рассечет больший круг на два сегмента: меньший и больший. Если точка A выбрана в меньшем сегменте, то отрезок AP будет иметь единственную общую точку с меньшей окружностью — саму точку P . Если же точка A лежит вне меньшего сегмента, то отрезок AP пересечет меньшую окружность в двух разных точках.

«Успехом» в отдельном испытании назовем попадание выбранной точки в меньший сегмент. Найдем вероятность p «успеха». Площадь кругового кольца равна 3π . Площадь сегмента равна разности площадей кругового сектора и равнобедренного треугольника, опирающегося на хорду l : $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{\text{треуг}} = \frac{1}{3} 4\pi - \sqrt{3}$,

$$\text{Значит, } p = \frac{S_{\text{сегм}}}{S_{\text{кольца}}} = \frac{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}}{3\pi} \approx 0,2607, \quad q = 0,7393.$$

б) Здесь дважды проведено испытание из пункта а) и оба раза произошла «неудача». Вероятность такого события равна $q^2 \approx 0,7393^2 \approx 0,5466$.

в) Тут требуется найти вероятность наступления хотя бы одной «неудачи». Это событие противоположно тому, что оба раза произойдет «удача». Вероятность равна $1 - p^2 \approx 0,932$.

г) Здесь дважды произошла «удача». Вероятность равна $p^2 \approx 0,068$.

$$\text{Ответ: а) } \frac{\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}}{3\pi} \approx 0,2607; \text{ б) } 0,5466; \text{ в) } 0,932; \text{ г) } 0,068.$$

Заключительные четыре задачи № 23.17—23.20 этого параграфа связаны с нахождением наимвероятнейшего числа $k_{\text{наивер}}$ «успехов» в n испытаниях Бернулли:

— если число $np - q$ целое, то $k_{\text{наивер}}$ принимает два значения: $np - q$ и $np - q + 1$;

— если число $np - q$ не целое, то $k_{\text{наивер}}$ равно ближайшему к $np - q$ справа целому числу.

В любом случае $k_{\text{наивер}}$ заключено между числами $np - q$ и $np - q + 1 = np + p$.

В отличие от задач на точное вычисление вероятностей $P_n(k)$ по формуле Бернулли подсчеты тут сравнительно просты.

23.18. Вероятность опечаток на одной странице оценивается в 1%. Оцените общее количество n напечатанных страниц, если число страниц с опечатками оказалось равным:

а) 5; б) 10; в) 20; г) 100.

Решение. Независимо повторяется одно и то же испытание: проверка очередной напечатанной страницы на наличие опечаток. «Успех» — это наличие опечатки; вероятность p «успеха» по условию равна (приближенно) 0,01, а вероятность q «неудачи» равна 0,99. Будем предполагать, что при печати произошла типичная ситуация, т. е. число страниц с опечатками совпало с наимвероятнейшим числом $k_{\text{наивер}}$ «успехов» в серии проводимых повторений.

а) $np - q \leq k_{\text{наивер}} \leq np + p$, $k_{\text{наивер}} = 5$. Значит,

$$0,01n - 0,99 \leq 5 \leq 0,01n + 0,01 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4,99 < 0,01n \leq 5,99 \Leftrightarrow 499 < n \leq 599.$$

б), в), г) решаются аналогично.

Ответ: а) от 499 до 599; б) от 999 до 1099; в) от 1999 до 2099; г) от 9999 до 10 099.

§ 24. Статистические методы обработки информации

Как указано в задачнике, первая серия задач № 24.1—24.5 связана с простейшим статистическим анализом результатов одного и того же измерения. Все этапы этого анализа разбиты на небольшие шаги, которые и приведены в пунктах а) — г) этой серии задач. Для полноты воспроизведем результаты измерения и в данном пособии.

Студенты одной группы на экзамене по истории получили следующие отметки:

4	3	4	2	3	4	5	3	3	4
3	4	5	4	5	2	4	4	5	2

24.4. а) Найти отклонения вариант измерения I от средние результатов измерения.

б) Проверить, что сумма всех отклонений равна нулю.

в) Найти квадраты отклонений и сумму квадратов отклонений от среднего.

г) Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Привести решение этой задачи отдельно от предыдущих задач вряд ли возможно. Начнем со сгруппированно ряда данных (№ 24.1, г)):

$$\underbrace{2, 2, 2}_3, \underbrace{3, 3, 3, 3}_5, \underbrace{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4}_8, \underbrace{5, 5, 5}_4.$$

Удобно найти среднее результатов измерения (№ 24.3, г)):

$$\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4}{20} = \frac{6 + 15 + 32 + 20}{20} = \frac{73}{20} = 3,65.$$

Теперь перейдем собственно к пунктам этой задачи.

а) Следует вычислить разности между результатами измерения и найденным средним: $2 - 3,65 = -1,65$; $3 - 3,65 = -0,65$; $4 - 3,65 = 0,35$; $5 - 3,65 = 1,35$. Для наглядности ответы можно собрать в таблицу (см. ответ).

б) Было три результата («двойки» на экзамене), отклонившихся от среднего на $-1,65$, пять результатов («тройки»), отклонившихся от среднего на $-0,65$, восемь результатов («четверки»), отклонившихся от среднего на $0,35$, и четыре результата («пятерки» на экзамене), отклонившихся от среднего на $1,35$. Вычислим общую сумму отклонений:

$$3(-1,65) + 5(-0,65) + 8 \cdot 0,35 + 4 \cdot 1,35 = -8,2 + 8,2 = 0.$$

в) Вычисление аналогично пункту б), только кратности 3, 5, 8, 4 надо умножать на *квадраты* отклонений:

$$3(-1,65)^2 + 5(-0,65)^2 + 8 \cdot 0,35^2 + 4 \cdot 1,35^2 = 3 \cdot 2,7225 + 5 \cdot 0,4225 + 8 \cdot 0,1225 + 4 \cdot 1,8225 = 18,55.$$

г) Дисперсия — это среднее квадратов отклонений, т.

$D = \frac{18,55}{20} = 0,9275$, а среднее квадратическое — это квадратный корень из дисперсии, т. е. $\sigma = \sqrt{D} = 0,9631$.

Ответ: а) — в)

Варианта	2	3	4	5
Отклонение от среднего	-1,65	-0,65	0,35	1,35
Квадрат отклонения	2,7225	0,4225	0,1225	1,8225

Сумма квадратов = 18,55;

г) $D = 0,9275$, $\sigma \approx 0,9631$.

24.5. Отметки «2» и «3» не позволяют получать стипендию, будем считать их «нулевыми» (для получения стипендии). Отметки «4» и «5» будем считать «единичными». Для распределения отметок на «нулевые» и «единичные»:

а) составить таблицы распределения кратностей и частот;

б) построить гистограммы распределения с шириной столбцов, равной 1;

в) вычислить моду и среднее значение;

г) вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. а) — б) Всего было 8 «нулевых» и 12 «единичных» отметок. Значит, кратность «нулевых» отметок равна 8, а частота

равна $\frac{8}{8 + 12} = 0,4$. Кратность «единичных» отметок равна 12, а частота равна 0,6 (рис. 71). (Табличное представление см. в ответах.)

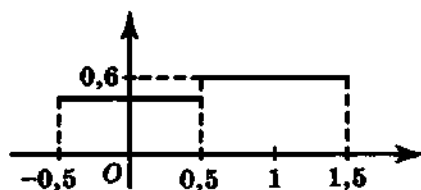


Рис. 71

в) «Единичных» отметок больше, они — «модные», т. е. мода равна 1. Среднее значение равно $\frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 12}{20} = 0,6$.

г) Восемь результатов отклонились от среднего значения на $-0,6$, а двенадцать результатов — на $0,4$. Сумма квадратов отклонений равна $8 \cdot (-0,6)^2 + 12 \cdot 0,4^2 = 4,8$.

Значит, дисперсия равна $D = \frac{4,8}{20} = 0,24$, а среднее квадратическое равно $\sigma = \sqrt{D} = 0,4899$.

Ответ: а)

Варианта	0	1	Всего: 2
Кратность варианты	8	12	Сумма = 20
Частота варианты	0,4	0,6	Сумма = 1

в) мода равна 1, среднее равно 0,6; г) $D = 0,24$, $\sigma \approx 0,4899$.

Следующие пять задач № 24.6—24.10 посвящены работе с таблично заданными результатами тех или иных измерений. Другими словами, здесь заранее предполагается, что результаты

измерения уже были сгруппированы и собраны в таблицы распределения и теперь всю информацию следует получать уже из самих таблиц. На наш взгляд, интересны задачи № 24.7 и 24.8. В них, по существу, проверяется умение учеников работать с процентами и долями (частями). Задачи № 24.9 и 24.10 являются более сложными вариантами этих двух задач.

24.9. Требуется восстановить сводную таблицу распределения данных некоторого измерения по следующей информации:

Варианта	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Всего: 4 варианты
Кратность		k		$2k$	Сумма = 100
Частота					Сумма =
Частота, %	$3k$	$k^2 - 7k - 33$			Сумма = %

а) С какого столбца следует начать восстановление данных?

б) Составить уравнение, связывающее данные, выбранные в пункте а).

в) Решить это уравнение и найти значение k .

г) Заполнить всю таблицу.

Решение. а) Правильнее всего начинать с того столбца, в котором уже заполнено больше всего клеток, т. е. со столбца № 2.

б) Всего было 100 данных, среди них встретились ровно k результатов, равных варианту № 2. Значит, частота варианты № 2 равна $\frac{k}{100}$, а процентная частота в 100 раз больше частоты, т. е. равна k . Поэтому $k^2 - 7k - 33 = k$.

в) $k^2 - 7k - 33 = k$, $k_1 = -3$, $k_2 = 11$. Но k — натуральное число. Поэтому $k = 11$.

г) Столбцы № 1 и 4 теперь заполняются сразу, так как по одной заполненной клетке легко восстанавливаются сведения в других клетках. Столбец № 3 заполняется «по дополнению»: всего было 100 результатов, а в столбцах № 1, 2, 4 оказалось 66 результатов. Значит, кратность варианты № 3 равна 34. Вот что получится в итоге:

Варианта	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Всего: 4 варианты
Кратность	33	11	34	22	Сумма = 100
Частота	0,33	0,11	0,34	0,22	Сумма = 1
Частота, %	33	11	34	22	Сумма = 100 %

24.10. Дана сводная таблица распределения результатов некоторого измерения:

Варианта	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Всего: 4 варианты
Кратность		x	y	$x + y$	Сумма = 50
Частота					Сумма =
Частота, %		$23x - 105$	$y^2 - y - 70$		Сумма = %

а) Найти x . б) Найти y . в) Восстановить всю таблицу. г) Найти моду этого распределения.

Решение. Способ рассуждений такой же, как и в № 24.9.

а) Частота варианты № 2 равна $\frac{x}{50}$, а процентная частота в 100 раз больше. Значит, $\frac{x}{50} \cdot 100 = 23x - 105$, $2x = 23x - 105$, $x = 5$.

б) $\frac{y}{50} \cdot 100 = y^2 - y - 70$, $y^2 - 3y - 70 = 0$, $y_1 = 10$, $y_2 = -7$.

Так как $y > 0$, то $y = 10$.

в) Теперь поочередно восстанавливаем информацию в столбцах № 2 и 3, затем заполняем первую клетку в столбце № 4 и, значит, заполняем весь столбец. После этого «по дополнению» восстанавливаем столбец № 1.

Варианта	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	Всего: 4 варианты
Кратность	20	$x = 5$	$y = 10$	15	Сумма = 50
Частота	0,4	0,1	0,2	0,3	Сумма = 1
Частота, %	40	10	20	30	Сумма = 100 %

г) Варианта № 1 встретилась больше всего раз, она и является модой этого измерения.

Третья серия задач № 24.11—24.16 несколько напоминает серию задач № 24.1—24.5: также проводится статистический анализ одного и того же измерения: отметок по русскому языку и по литературе, полученных учениками одного класса за проверочное сочинение. С этой точки зрения тут повторяются и закрепляются знания по простейшей статистической обработке информации. Напомним, что были получены такие отметки (первая по литературе, вторая — по русскому языку):

5/4 4/5 3/1 4/3 2/3 3/3 4/3 5/3 3/3 1/2 4/4 4/2 2/1
3/5 3/4 4/3 5/5 4/4 5/4 2/2 2/3 4/3 5/4 2/3 3/3

24.15. а) Вычислить среднее квадратическое распределение отметок по литературе.

б) Вычислить среднее квадратическое распределение отметок по русскому языку.

в) По какому предмету отметки в среднем выше?

г) По какому предмету отметки имеют более устойчивый характер?

Решение. Как и в задаче № 24.4, привести решение этой задачи отдельно от предыдущих задач серии невозможно. Сгруппированный ряд отметок по литературе таков (№ 24.11, а)): 1, 2, 2, 2, 2, 2,

3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5. Их среднее

значение равно $\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 5}{25} = \frac{86}{25} = 3,44$

(24.11, г)). Нахождение среднего квадратического σ оформим в виде таблицы.

Варианта x_i	Кратность n_i	Отклонение от среднего	Квадрат $(x_i - M)^2$ отклонения	Произведение $n_i (x_i - M)^2$
1	1	-2,44	5,9536	5,9536
2	5	-1,44	2,0736	10,368
3	6	-0,44	0,1936	1,1616
4	8	0,56	0,3136	2,5088
5	5	1,56	2,4336	12,168
				Сумма = 32,16

Делим найденную сумму на объем (25) измерения и получаем ответ: $D = 1,284$, $\sigma = \sqrt{D} = 1,133$.

б) Сгруппированный ряд отметок по русскому языку выглядит так (№ 24.12, а)): 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, ..., 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5.

Их среднее значение равно

$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{25} = 3,2$ (№ 24.12, г)).

Как и в пункте а), вычисления оформим в виде таблицы.

Варианта x_i	Кратность n_i	Отклонение от среднего	Квадрат $(x_i - M)^2$ отклонения	Произведение $n_i \cdot (x_i - M)^2$
1	2	-2,2	4,84	9,68
2	8	-1,2	1,44	4,32
3	11	-0,2	0,04	0,44
4	6	0,8	0,64	3,84
5	3	1,8	3,24	9,72
				Сумма = 28

$$D = \frac{28}{25} = 1,12, \quad \sigma = \sqrt{D} = 1,0583.$$

в) Так как $3,44 > 3,2$, то отметки по литературе в среднем выше отметок по русскому языку.

г) Так как $1,133 > 1,0583$, то рассеивание отметок по русскому языку меньше, т. е. эти отметки имеют более устойчивый характер.

Заключительные четыре задачи № 24.17—24.20 несколько напоминают задачи № 24.6—24.10. Речь снова идет о распределениях, заданных уже в табличном виде. Только сведения о распределении либо не полны, и тогда требуется восстановить нужную информацию, либо в некоторых клетках стоят не числа, а функции от одной переменной, и тогда нужно исследовать поведение числовых характеристик распределения от этой переменной.

24.18. После урока по теме «Статистика» на доске остались ответ: «Среднее значение равно 10» и таблица:

Варианта	4	7	11
Кратность	5	2	

- Какое число должно быть записано в пустой клетке?
- Найти размах и моду распределения.
- Вычислить среднее квадратическое отклонение.
- Может ли среднее значение равняться пяти при каком-нибудь заполнении пустой клетки?

Решение.

а) Пусть в пустой клетке стоит x . Тогда общий объем измерения равен сумме кратностей, т. е. равен $5 + 2 + x = 7 + x$, а среднее значение вычисляется так:

$$10 = \frac{4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 11x}{7 + x}.$$

Значит, $70 + 10x = 34 + 11x$, $x = 36$.

б) Размах равен $11 - 4 = 7$, а модой является варианта 11: она встретилась больше всего раз.

в) По условию среднее значение равно 10. Соберем вычисления в таблице.

Варианта x_i	Кратность n_i	Отклонение от среднего	Квадрат $(x_i - M)^2$ отклонения	Произведение $n_i (x_i - M)^2$
4	5	-6	36	180
7	2	-3	9	18
11	36	1	1	36
				Сумма = 234

$$D = \frac{234}{43} \quad 5,44, \quad \sigma = \sqrt{D} \quad 2,33.$$

г) Допустим, что для некоторого x , поставленного в пустую клетку, среднее оказалось равным 5. Тогда аналогично пункту а)

$$\text{получаем: } 5 = \frac{4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 11x}{7 + x}, \quad x = \frac{7 \cdot 5 - 34}{11 - 5} = \frac{1}{6}.$$

Но x — натуральное число. Противоречие. Значит, среднее не может равняться 5.

Ответ: а) 36; б) 7; 11; в) 2,33; г) нет.

24.19. Таблица распределения кратностей имеет вид:

Варианта	0	1	3	5	6
Кратность	19	2	$3x - 1$	5	$4x - 7$

а) Выразить среднее значение через x .

б) Как выглядит график зависимости среднего значения от x ?

в) Каким может быть число x , если модой является 0?

г) Может ли мода распределения равняться трем?

Решение.

$$\text{а) } \frac{0 \cdot 19 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (3x - 1) + 5 \cdot 5 + 6 \cdot (4x - 7)}{19 + 2 + (3x - 1) + 5 + (4x - 7)} = \frac{33x - 18}{7x + 18}.$$

б) Формула $y = \frac{33x - 18}{7x + 18}$ задает дробно-линейную функцию.

Но $4x - 7$ — натуральное число, т. е. $4x - 7 \geq 1$, $x \geq 2$. Поэтому графиком зависимости $y = y(x)$ будет часть одной из ветвей гиперболы.

в) По условию варианта 0 встретилась больше всего раз. Значит, ее кратность — наибольшая, т. е. $19 \geq 3x - 1$, $x \leq \frac{20}{3} = 6,6...$

и $19 > 4x - 7$, $x < \frac{26}{4} = 6,5$. Кроме того, см. пункт б), $x > 2$. Так

как $3x - 1$ и $4x - 7$ — целые числа, то числа $3x$ и $4x$ — целые, значит, $x = 4x - 3x$ — целое число. На отрезке $[2; 6,666...]$ лежат следующие целые числа: 2, 3, 4, 5, 6.

г) Если мода распределения равна 3, то $3x - 1 > 19$, $x > \frac{20}{3} = 6,666...$ и в то же время $3x - 1 > 4x - 7$, $x < 6$, чего не может быть.

Ответ: а) $\frac{33x - 18}{7x + 18}$; б) часть одной из ветвей гиперболы; в) 2; 3; 4; 5; 6; г) нет.

24.20. Таблица распределения кратностей имеет вид:

Варианта	0	1	3	5	6
Кратность	10	$2x$	$3x - 1$	5	$x + 5$

а) Выразить через x среднее значение.

б) Как выглядит график зависимости среднего значения от x ?

в) Каким может быть x , если модой является 0?

г) Может ли мода распределения равняться единице?

Решение. а) Варианта 0 встретила 10 раз, варианта 1 встретила $2x$ раз, варианта 3 встретила $3x - 1$ раз, варианта 5 встретила 5 раз и варианта 6 встретила $x + 5$ раз. Значит, всего было произведено $10 + 2x + (3x - 1) + 5 + (x + 5) = 6x + 19$ измерений. Найдем сумму всех чисел, полученных в результате измерений:

$$0 \cdot 10 + 1 \cdot 2x + 3 \cdot (3x - 1) + 5 \cdot 5 + 6 \cdot (x + 5) = 17x + 52.$$

Поэтому среднее равно $\frac{17x + 52}{6x + 19}$.

б) График дробно-линейной функции — это гипербола. В данном случае ее вертикальная асимптота — это прямая $x = -\frac{19}{6}$, а горизонтальная асимптота — прямая $y = \frac{17}{6}$. Всю гиперболу можно не рисовать: ведь x по условию есть целое число (см. кратность $x + 5$) и $x \geq 0$ (см. кратность $2x$). Так как $\frac{52}{19} < \frac{17}{6}$, то нужная ветвь гиперболы приближается к прямой $y = \frac{17}{6}$ снизу.

в) По условию чаще всего (10 раз) встретилось число 0. Значит, $0 < 2x < 10$, $0 < 3x - 1 < 10$ и $0 < x + 5 < 10$, т. е. $0 < x < \frac{11}{3}$. Учитывая, что x целое число, получаем очень немного вариантов: $x \in \{1, 2, 3\}$.

г) Если мода равна 1, то $2x$ — самая большая из всех имеющихся кратностей, т. е.

$$10 < 2x, 3x - 1 < 2x, 5 < 2x, x + 5 < 2x.$$

Значит, $5 < x$ и $x < 1$, чего не может быть.

Ответ: а) $\frac{17x + 52}{6x + 19}$; б) последовательность точек на одной из ветвей гиперболы; в) 1; 2; 3; г) нет.

§ 25. Гауссова кривая. Закон больших чисел

В первых шести задачах этого параграфа продолжается работа с теоремой Бернулли (см. § 23). На конкретных примерах происходит повторение понятий «успех» и «неудача», а также формулы из теоремы Бернулли. В двенадцати пунктах (задачи № 25.3—25.5) в различных ситуациях показано, что сама формула однозначно восстанавливается по частично приведенным в ней данным. В задаче № 25.6 ученики должны найти ошибку (описку), допущенную при конкретном использовании формулы Бернулли. Принципиальных методических сложностей здесь нет: идет повторение уже изученного материала. Кроме всего прочего, из рассмотренных примеров явно следует, что абсолютно точные вычисления по формуле $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ невозможны — нужны приближенные вычисления.

В следующих трех задачах № 25.7—25.9 происходит первое знакомство и привыкание к таблице значений гауссовой функции Φ . Для решения этих задач вполне достаточно самой табли-

цы: ни «страшная» формула $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, ни «колоколообразный» вид гауссовой кривой, ни связь с теоремой Бернулли тут пока не нужны. Ученики просто должны «попутешествовать» по этой таблице.

Первой серьезной задачей является задача № 25.10. В ней впервые гауссова функция Φ , а точнее таблица ее значений, используется для вычисления конкретных вероятностей.

25.10. Вероятность рождения мальчика примем равной 50 %. Найти вероятность того, что среди 400 новорожденных будет ровно:

а) 220 мальчиков; б) 180 девочек; в) 210 мальчиков; г) 300 девочек.

Решение. Мы предполагаем, что проводится $n = 400$ независимых повторений одного и того же испытания: определение пола новорожденного. «Успехом» назовем рождение мальчика. Вероятность p «успеха» по условию равна 0,5, т. е. и $q = 1 - p = 0,5$. Будем действовать по алгоритму использования гауссовой функции $y = \varphi(x)$, описанному в учебнике (§ 25). Неравенство $npq > 10$, очевидно, верно.

а) Рождение 220 мальчиков — это 220 «успехов» в $n = 400$ испытаниях Бернулли. Значит, $k = 220$ и

$$x_{220} = \frac{220 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{100}} = \frac{20}{10} \quad 2.$$

По таблице значений находим $\varphi(2) = 0,054$. Поэтому

$$P = P_{400}(220) \frac{\varphi(2)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,054}{10} = 0,0054.$$

б) Рождение 180 девочек из 400 новорожденных — это в точности рождение 220 мальчиков, т. е. это в точности событие из пункта а).

в) Решение практически совпадает с пунктом а). Следует только 220 заменить на 210:

$$x_{210} = \frac{210 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{100}} = \frac{10}{10} \quad 1,$$

$$P = P_{400}(210) \frac{\varphi(1)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,242}{10} = 0,0242.$$

г) 300 девочек — это в точности 100 мальчиков, т. е. 100 «успехов» в $n = 400$ испытаниях. Действуем так же, как и в пунктах а) и в);

$$x_{100} = \frac{100 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{100}} = \frac{-30}{10} \quad -3,$$

$$P = P_{400}(100) \frac{\varphi(-3)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(3)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,00443}{10} \quad 0,0004.$$

Мы видим, что вероятность этого события чрезвычайно мала. С хорошей степенью точности можно считать, что она равна нулю.

Ответ: а), б) 0,0054; в) 0,0242; г) 0,0004.

Следующие две задачи продолжают знакомство с алгоритмом использования гауссовой функции φ , но в случаях, когда «успех» и «неудача» уже не равновозможны.

25.11. При входе на выставку аттракционов стоит урна с четырьмя черными и одним белым шаром. Входящий вытаскивает шар и потом возвращает его обратно. Если шар оказался белым, то посетитель проходит на выставку бесплатно, а если черным, то покупает билет. Какова вероятность того, что из 2500 посетителей бесплатно пройдет ровно:

а) 1000; б) 500; в) 450; г) 510 человек?

Решение. Мы предполагаем, что проводится $n = 2500$ независимых повторений одного и того же испытания: прохождение очередного посетителя на выставку. «Успехом» назовем бесплатное прохождение, т. е. событие, состоящее в том, что посетитель вытаскивает единственный белый шар из пяти имеющихся в урне шаров. Вероятность p «успеха» равна 0,2 и $q = 1 - p = 0,8$. Неравенство $npq > 10$, очевидно, верно.

а) Прохождение бесплатно ровно 1000 посетителей — это $k = 1000$ «успехов» в $n = 2500$ испытаниях Бернулли: $p = 0,2$, $q = 0,8$, $npq = 2500 \cdot 0,16 = 400$.

Значит, $x_{1000} = \frac{1000 - 2500 \cdot 0,2}{\sqrt{400}} = \frac{500}{20} = 25$. По таблице значений функций Φ находим $\Phi(25) \approx 0$, так как уже $\Phi(5) \approx 0,0000015$.

Поэтому $P = P_{2500}(1000) \approx \frac{\Phi(25)}{20} \approx 0$.

б) Здесь $k = 500$ «успехов». Так как и $np = 500$, то мы имеем дело с наименее вероятным числом «успехов». На уровне вычислений по таблице это будет заметно по очень простой причине: в числителе дроби будет стоять наибольшее значение функции

$\Phi(0) \approx 0,3989$. Итак, $x_{500} = \frac{500 - 2500 \cdot 0,2}{\sqrt{400}} = 0$ и

$$P \approx P_{2500}(500) \approx \frac{\Phi(x_{500})}{\sqrt{npq}} = \frac{\Phi(0)}{20} \approx \frac{0,3989}{20} \approx 0,02.$$

$$\text{в) } x_{450} = \frac{450 - 2500 \cdot 0,2}{\sqrt{400}} = -2,5,$$

$$P \approx \frac{\Phi(-2,5)}{20} = \frac{\Phi(2,5)}{20} \approx \frac{0,0175}{20} \approx 0,0009.$$

$$\text{г) } x_{510} = \frac{510 - 2500 \cdot 0,2}{\sqrt{400}} = 0,5,$$

$$P \approx \frac{\Phi(0,5)}{20} \approx \frac{0,3521}{20} \approx 0,0176.$$

Как мы видим, все значимые вероятности довольно плотно сосредоточены около наимвероятнейшего числа «успехов» $k = np = 500$. Если $k < 400$ или $k > 600$, то вероятности $P = P_{2500}(k)$ практически равны нулю.

Ответ: а) 0; б) 0,02; в) 0,0009; г) 0,0176.

25.12. Один из этапов отбора участников для игры «Ну и счастливичик!» организован так. Ведущий записывает произвольную цифру от 0 до 9. После этого очередной участник вслух произвольно называет свою цифру от 0 до 9. Если цифры совпали, то участник проходит на следующий этап. Какова вероятность того, что из 10 000 игроков в следующий этап пройдут ровно: а) 2000; б) 1000; в) 970; г) 900 участников?

Решение. Мы предполагаем, что проводится $n = 10\,000$ независимых повторений одного и того же испытания: проведение очередного этапа игры. «Успехом» назовем прохождение в следующий этап, т. е. событие, состоящее в том, что совпали цифры участника и ведущего. Так как всего имеется $10 \cdot 10 = 100$ пар цифр, из которых ровно 10 составляют пары совпавших цифр, то вероятность p «успеха» равна 0,1 и $q = 1 - p = 0,9$. Неравенство $npq > 10$, очевидно, верно. Так как $np = 1000$, то наимвероятнейшим будет число $k = 1000$ «успехов».

а) $x_{2000} = \frac{2000 - 10\,000 \cdot 0,1}{\sqrt{900}} = \frac{1000}{30} \approx 33,33$. По таблице значений находим $\Phi(33,33) \approx 0$, так как уже $\Phi(5) \approx 0,0000015$. Поэтому $P \frac{\Phi(33,33)}{30} \approx 0$.

б) $x_{1000} = 0$ и

$$P = P_{10\,000}(1000) = \frac{\Phi(0)}{30} = \frac{0,3989}{30} \approx 0,0133.$$

в) $x_{970} = \frac{970 - 1000}{\sqrt{900}} = -1$,

$$P \frac{\Phi(-1)}{30} = \frac{\Phi(1)}{30} \approx \frac{0,242}{30} \approx 0,0081.$$

г) $x_{900} = \frac{900 - 1000}{\sqrt{900}} = \frac{100}{30} = 3,3333\dots$,

$$P \frac{\Phi(3,33)}{30} \approx \frac{0,0015}{30} \approx 0.$$

Ответ: а) 0; б) 0,0133; в) 0,0081; г) 0.

Как мы видим, значения $P_n(k)$, как правило, весьма невысоки. Это неудивительно и с интуитивной точки зрения: вероятность того, что в n повторениях встретится не больше и не меньше, а *точно* k «успехов» должна быть небольшой. Ситуация становится более содержательной, когда мы переходим к нахождению вероятностей $P_n(k_1 < k < k_2)$ того, что число k «успехов» лежит в некоторых фиксированных пределах от k_1 до k_2 , т. е. к использованию функции Φ .

Дальнейшая серия задач № 25.13—25.18 является прямым аналогом задач № 25.7—25.12. В первых трех из них происходит знакомство с таблицей значений функции Φ , а задачи № 25.16—25.18 — это просто продолжения задач № 25.10—25.12.

25.17. (Продолжение задачи № 25.11.) Какова вероятность того, что из 2500 посетителей бесплатно пройдут: а) от 500 до 1000; б) от 400 до 600; в) от 500 до 520; г) от 490 до 510?

Решение. Теперь действуем по второму алгоритму, приведенному в § 25 учебника, — алгоритму использования функции Φ . Напомним, что

$$n = 2500, p = 0,2, q = 0,8, np = 500, npq = 400, \sqrt{npq} = 20.$$

а) По условию $500 < k < 1000$. Значит,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 500}{20} = 0;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1000 - 500}{20} = 25.$$

$$P = P_{2500}(500 < k < 1000) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(25) - \Phi(0) \approx 0,5 - 0 = 0,5.$$

Приближение $\Phi(25) \approx 0,5$ чрезвычайно точно: уже $\Phi(5) \approx 0,49999997$.

б) По условию $400 < k < 600$. Значит,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{400 - 500}{20} = -5;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{600 - 500}{20} = 5.$$

$$P = P_{2500}(400 < k < 600) \approx \Phi(5) - \Phi(-5) = \Phi(5) + \Phi(5) = 2\Phi(5) \approx 1.$$

Как уже отмечено в пункте а), точность этого приближения очень высока. Другими словами, практически невозможно, что

при таком количестве n независимых повторений и такой вероятности p «успеха» количество k «успехов» выйдет за пределы отрезка $[400; 600]$.

в) По условию $500 < k < 520$. Значит,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 500}{20} = 0;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{520 - 500}{20} = 1.$$

$$P = P_{2500}(500 < k < 520) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi(1) = 0,3413.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } P &= P_{2500}(490 < k < 510) = \Phi\left(\frac{510 - 500}{20}\right) - \Phi\left(\frac{490 - 500}{20}\right) = \\ &= \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) = \Phi(0,5) + \Phi(0,5) = 2\Phi(0,5) = 0,383. \end{aligned}$$

Ответ: а) 0,5; б) 1; в) 0,3413; г) 0,383.

25.18. (Продолжение задачи № 25.12.) Какова вероятность того, что из 10 000 участников на следующий этап пройдут: а) от 500 до 1000; б) не более 970; в) от 800 до 1200; г) не менее 2000?

Решение. Снова действуем по второму алгоритму, приведенному в § 25 учебника, — алгоритму использования функции Φ . По задаче № 25.12 мы знаем, что

$$n = 10\,000, p = 0,1, q = 0,9, np = 1000, npq = 900, \sqrt{npq} = 30.$$

а) По условию $500 < k < 1000$. Значит,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 1000}{30} = -16,66\dots;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1000 - 1000}{30} = 0.$$

$$\begin{aligned} P &= P_{10\,000}(500 < k < 1000) = \Phi(0) - \Phi(-16,66) = \\ &= \Phi(0) + \Phi(16,66) \approx 0 + 0,5 = 0,5. \end{aligned}$$

б) По условию $k \leq 970$. Чтобы сделать это неравенство двойным, вспомним, что $k \geq 0$.

$$\text{Значит, } 0 \leq k < 970, x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 1000}{30} = -33,33\dots \text{ и с}$$

огромной степенью точности $\Phi(x_1) \approx -0,5$. Так как

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{970 - 1000}{30} = -1, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} P &= P_{10\,000}(k < 970) = \Phi(-1) - \Phi(-33,33) = \\ &= \Phi(33,33) - \Phi(1) \approx 0,5 - 0,3413 = 0,1587. \end{aligned}$$

в) По условию $800 < k < 1200$. Значит,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{800 - 1000}{30} = -6,666...;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1200 - 1000}{30} = 6,666...$$

$$P = P_{10\,000}(800 < k < 1200) \approx \Phi(6,66) - \Phi(-6,66) = \\ = \Phi(6,66) + \Phi(6,66) = 2\Phi(6,66) \approx 1.$$

г) По условию $2000 < k$. Чтобы сделать это неравенство двойным, вспомним, что $k < 10\,000$. Значит, $2000 < k < 10\,000$,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2000 - 1000}{30} = 33,33...;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10\,000 - 1000}{30} = 300.$$

С огромной степенью точности $\Phi(x_1) \approx 0,5$ и $\Phi(x_2) \approx 0,5$. Поэтому

$$P = P_{10\,000}(2000 < k) \approx \Phi(300) - \Phi(33,33) \approx 0.$$

Ответ: а) 0,5; б) 0,1587; в) 1; г) 0.

Заключительные две задачи № 25.19 и 25.20 также связаны с алгоритмом использования функции Φ . В каждой из них рассмотрен достаточно жизненный пример.

25.20. В большом десятиэтажном доме на каждом этаже живет одинаковое количество жильцов. Какова вероятность того, что из 150 случайным образом опрошенных жильцов этого дома:

- на первом этаже проживает не менее 15 человек;
- на последних двух этажах проживает не более 30 человек;
- на четных этажах живет от 70 до 80 человек;
- выше четвертого этажа живет более 99 человек?

Решение. Независимо происходит 150 повторений одного и того же испытания: определение номера этажа, на котором живет очередной жилец. В отличие от задач № 25.17, 25.18 в пунктах этой задачи «успехи» и их вероятности различны.

а) «Успехом» назовем событие, состоящее в том, что опрошиваемый живет на первом этаже. Вероятность p «успеха» равна 0,1 и $q = 1 - p = 0,9$, $np = 15$, $npq = 13,5 > 10$, $\sqrt{npq} = \sqrt{13,5} \approx 3,67$.

По условию $15 < k$. Ясно, что $k < 150$. Значит, $15 < k < 150$,

$$x_1 = \frac{15 - 15}{\sqrt{13,5}} = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{150 - 15}{\sqrt{135}} = \frac{135}{3,67} \approx 36,78. \quad \text{С огром-}$$

ной степенью точности $\Phi(x_2) \approx 0,5$. Поэтому $P = P_{150}(15 \leq k) \approx \Phi(36,78) - \Phi(0) \approx 0,5$.

б) Здесь «успех» состоит в том, что опрашиваемый живет на девятом или на десятом этаже:

$$p = 0,2, q = 1 - p = 0,8,$$

$$np = 30, npq = 24 > 10, \sqrt{npq} = \sqrt{24} \quad 4,9.$$

По условию $k \leq 30$. Ясно, что $0 \leq k$. Значит, $0 \leq k \leq 30$,

$$x_1 = \frac{0 - 30}{4,9} \approx -6,12 \text{ и } x_2 = \frac{30 - 30}{\sqrt{24}} = 0. \text{ Поэтому}$$

$$P = P_{150}(0 \leq k \leq 30) \approx \Phi(0) - \Phi(-6,12) = \Phi(0) + \Phi(6,12) \approx 0,5.$$

в) Здесь «успех» состоит в том, что опрашиваемый живет на 2, 4, 6, 8 или 10-м этаже: $p = q = 0,5$, $np = 75$, $npq = 37,5 > 10$, $\sqrt{npq} = \sqrt{37,5} \quad 6,12$.

По условию $70 \leq k \leq 80$. Значит,

$$x_1 = \frac{70 - 75}{6,12} \approx -0,82; \quad x_2 = \frac{80 - 75}{6,12} = 0,82.$$

$$P = P_{150}(70 \leq k \leq 80) \approx \Phi(0,82) - \Phi(-0,82) = \Phi(0,82) + \Phi(0,82) = 2\Phi(0,82) \approx 0,5878.$$

г) «Успехом» назовем событие, состоящее в том, что опрашиваемый живет выше четвертого этажа. Таких этажей шесть из имеющихся десяти. Вероятность p «успеха» равна $0,6$ и $q = 1 - p =$

$0,4$, $np = 90$, $npq = 36 > 10$, $\sqrt{npq} = \sqrt{36} = 6$. По условию $99 \leq k \leq 100$. Ясно, что $k \leq 150$. Значит, $100 \leq k \leq 150$,

$x_1 = \frac{100 - 90}{6} \approx 1,66...$ и $x_2 = \frac{150 - 90}{6} = 10$. С огромной степенью точности $\Phi(x_2) \approx 0,5$. Поэтому

$$P = P_{150}(100 \leq k) \approx \Phi(10) - \Phi(1,66) \approx 0,5 - 0,4515 = 0,0485.$$

Ответ: а) 0,5; б) 0,5; в) 0,5878; г) 0,0485.

ГЛАВА 6. Уравнения и неравенства.

Системы уравнений и неравенств

Завершая изучение курса алгебры в школе, очень полезно посмотреть на него с самых общих позиций. Глава 6 как раз на это и нацелена. Она дает возможность повторить и переосмыслить основные идеи и методы, которые применялись на протяжении пяти лет изучения курса. Это очень важно, поскольку за обилием мелких приемов школьники рискуют не увидеть главного.

В § 26 речь идет о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие нет; когда надо делать проверку найденных корней и как ее делать. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры начиная с 8 класса, так что определенный опыт учащимися накоплен. Для разъяснения им идеологической сущности понятия равносильности уравнений можно использовать следующий нехитрый методический прием. Представим себе, что нужно измерить расстояние между пунктами A и B . По каким-то причинам нам удобнее измерить расстояние между пунктами C и D . Имеем ли мы право заменить первую задачу второй? Да, если точно известно, что эти задачи имеют одинаковые решения, т. е. если доподлинно известно, что расстояние между A и B равно расстоянию между C и D .

А теперь посмотрим, как мы рассуждаем при решении уравнений. Пусть требуется решить уравнение $5x - 4 = 2x + 8$, т. е. перед нами поставлен конкретный вопрос: при каких значениях x выражения $5x - 4$ и $2x + 8$ принимают одинаковые значения. Что мы делаем? Мы уходим от ответа на этот вопрос и заменяем уравнение другим — уравнением $5x - 2x = 8 + 4$, т. е. $3x = 12$, откуда получаем, что $x = 4$. Таким образом, решаем иную задачу, отвечаем на другой вопрос: при каких значениях x выражения $3x$ и 12 принимают одинаковые значения. Имеем ли мы право на подобную подмену? Да, если точно известно, что эти задачи имеют одинаковые решения, если доподлинно известно, что уравнения имеют одинаковые корни, т. е. что они равносильны. Потому-то стратегическая линия решения уравнения состоит в следующем: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем (1), но равносильное ему; уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), но равносильное ему и т. д. В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни, объявляя их одновременно корнями заданного уравнения.

Но, к сожалению, указанная стратегическая линия далеко не всегда реализуема, часто мы вынуждены осуществлять такие преобразования уравнения, которые приводят к уравнению-следствию (т. е. все искомые корни сохранились, но могли добавиться новые — посторонние). Тогда приходится все найденные корни последнего уравнения цепочки проверять подстановкой в исходное уравнение, отсеивая посторонние корни.

Советуем вам на первых порах, пока речь идет об осмыслении принципиальных вопросов, оформлять решение уравнений по схеме из трех этапов, которые указаны в § 26 и которые мы

уже ранее упомянули при обсуждении методических проблем, связанных с решением логарифмических уравнений.

Первый этап — технический. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow \dots$ и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — анализ решения. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — проверка. Если проведенный анализ показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение (или каким-либо иным способом).

Реализация этого плана связана с четырьмя вопросами: как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием; какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие; если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена с громоздкими вычислениями; в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить.

Советуем вам до детального обсуждения этих вопросов, каждому из которых отведен отдельный пункт параграфа, разобрать с учащимися несколько простых примеров, показывающих, что иногда на эти вопросы мы уже отвечали. Скажем, переход от уравнения $2^{5x-3} = 2^{7x+4}$ к уравнению $5x - 3 = 7x + 4$ является равносильным преобразованием по теореме, полученной в § 12; корень последнего уравнения $x = -3,5$ является единственным корнем заданного показательного уравнения. Это был ответ на первый вопрос. Переход от уравнения $\ln(5x - 3) = \ln(7x + 4)$ к уравнению $5x - 3 = 7x + 4$ является неравносильным преобразованием (об этом шла речь в § 17); корень последнего уравнения $x = -3,5$ является посторонним для заданного логарифмического уравнения. Это был ответ на второй вопрос. Отвечали мы при решении логарифмических уравнений и на третий вопрос — как выполнять проверку корней. На этот вопрос мы отвечали и в 8 классе при решении рациональных уравнений с переменной в знаменателе и при решении иррациональных уравнений (с квадратными корнями). Говорили мы и о том, что нельзя при решении уравнений делить обе части уравнения на выражение с переменной, что может привести к потере корней. Следовательно, цель § 26 заключается в том, чтобы свести эти разрозненные представления в систему.

В первом пункте параграфа приведены 6 теорем о равносильности уравнений, которые изучались в курсе алгебры начиная

с 8 класса. Обратите внимание учащихся на то, что первые три теоремы гарантируют равносильность преобразований без всяких дополнительных условий, а три последние теоремы «работают» лишь при определенных условиях, их использование на практике сопряжено с необходимостью осуществления проверки. Более точный вывод сделан в пункте 2: если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировке теоремы, то получится уравнение-следствие.

Относительно редко используется теорема о том, что возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечетную степень является равносильным преобразованием уравнения. Между тем и с этой теоремой могут быть связаны интересные и неожиданные решения уравнений. Рассмотрим пример (объективно считающийся достаточно трудным): решить уравнение $(3x - 4)^{4014} + (10x - 24)^{2007} = 0$. Имеем $((3x - 4)^3)^{2007} = (24 - 10x)^{2007}$. Это уравнение равносильно уравнению $(3x - 4)^3 = 24 - 10x$, откуда находим: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{4}{9}$.

После рассмотрения ряда примеров делается важный вывод: исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, обязательна проверка всех найденных корней, если:

1) произошло расширение области определения уравнения (за счет освобождения в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину; за счет освобождения от знаков корней четной степени; за счет освобождения от знаков логарифмов);

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (имеющее смысл всюду в области определения уравнения).

Не переоценивайте способ проверки по ОДЗ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения иных причин нарушения равносильности, кроме расширения области определения, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется, например, метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит, лучше делать проверку подстановкой.

В последнем пункте § 26 указаны две основные причины потери корней при решении уравнений: деление обеих частей на одно и то же выражение $h(x)$; сужение ОДЗ в процессе решения

уравнения. С первой причиной бороться нетрудно: можно просто запретить деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение. Со второй причиной бороться сложнее, можно лишь посоветовать, применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следить за тем, чтобы области определения правой и левой частей формулы были одинаковыми. В учебнике приведен достаточно очевидный пример на эту тему, здесь мы приведем еще один пример, более тонкий.

Пример. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

Решение. Воспользуемся универсальной подстановкой:

$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}; \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Получаем:

$$\frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} = 1;$$

$$u = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Но, как легко видеть, уравнению удовлетворяют и значения $x = \pi + 2\pi n$. Когда же они успели «потеряться»? Когда мы заменили $\sin x$ и $\cos x$, которые определены при любых x , их выражениями через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, сужающими область определения. Для $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ появляется естественное ограничение: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е. $x \neq \pi + 2\pi n$ — именно эти значения и «потерялись».

В § 27 речь идет об общих идеях, на которых основано решение уравнений, о наиболее общих методах, используемых при решении уравнений любых видов. Выделены четыре следующие метода.

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.
2. Метод разложения на множители.
3. Метод введения новой переменной.
4. Функционально-графический метод.

Все они проиллюстрированы достаточно большим числом примеров. Большая подборка упражнений на эту тему имеется в задачнике, причем, обратите внимание, мы делаем упор на отработку общих идей и методов, а не на отработку навыков решения конкретных видов уравнений. Поэтому в задачнике в одном параграфе мирно уживаются и рациональные, и иррациональные, и показательные, и логарифмические, и тригонометрические уравнения.

В § 28 речь идет о решении неравенств с одной переменной и прежде всего о принципиальных вопросах, связанных с решением неравенств: что такое равносильные неравенства, какие преобразования неравенств являются равносильными, а какие нет. Эти вопросы обсуждались в курсе алгебры начиная с 8 класса, но мы снова возвращаемся к ним потому, что, завершая изучение школьного курса алгебры, целесообразно переосмыслить общие идеи и методы.

В начале параграфа напоминаются понятия частного и общего решения неравенства с одной переменной, равносильности неравенств, затем — системы неравенств, вводятся новые понятия — следствия неравенства, совокупности неравенств. Конечно, мы могли бы ввести понятие следствия неравенства еще в § 18, при решении логарифмических неравенств, и фактически оно там используется (как бы на подсознательном уровне), да и понятие совокупности (например, для уравнений) неявно применялось. Но, верные своей тактике, начиная с 7 класса мы не стремимся сразу выходить на формальный уровень, предпочитаем сначала действовать на рабочем уровне. По той же причине только в этом параграфе переходим на формальный уровень и в тех рассуждениях, что применялись ранее при решении логарифмических неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Учащиеся знают, что при $a > 1$ следует перейти к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Теперь же их внимание обращается на то, что в каждой из систем есть по одному «лишнему» неравенству. В первой системе первое неравенство — следствие второго и третьего неравенств, а неравенство-следствие в системе можно отбросить. Таким образом, первую систему можно заменить более простой:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогично устанавливается, что вторую систему можно заменить более простой системой неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Принципиальное отличие неравенств от уравнений состоит в следующем: при решении уравнений мы не очень опасаемся того, что в результате некоторых преобразований получим уравнение-следствие, поскольку посторонние корни можно отсеять с помощью проверки. В неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество, доводить дело до проверки бессмысленно. Поэтому в неравенствах стараются выполнять только равносильные преобразования. Они описаны в шести теоремах, приведенных в § 28 и в определенном смысле аналогичных соответствующим теоремам о равносильности уравнений, которые обсуждались в § 26.

Основная «техническая» идея решения большинства неравенств (неравенств с модулями, логарифмических, иррациональных) состоит в следующем: неравенство преобразуют в равносильную ему систему или в совокупность систем рациональных неравенств. Совокупность систем — довольно сложная конструкция, требующая (если вы решили обсуждать эти проблемы с учащимися) неспешного и детального рассмотрения, как это сделано, например, в учебнике при решении логарифмического неравенства $\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$, а также при обсуждении идеологии решения иррациональных неравенств вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x).$$

или

$$\sqrt{f(x)} > g(x).$$

Устанавливается, что иррациональное неравенство первого вида равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2, \end{cases}$$

а иррациональное неравенство второго вида равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

В § 33 расширяются представления учащихся о решении систем уравнений: рассматриваются ранее не встречавшиеся классы

систем уравнений (например, иррациональных, тригонометрических), системы уравнений с тремя и четырьмя переменными.

Основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному; если же осуществляется переход к уравнению-следствию, то обязательна проверка найденных корней. Так же обстоит дело и при решении систем уравнений. Существенно то, что метод подстановки, метод алгебраического сложения и метод введения новых переменных, которые изучались в школе начиная с 7 класса, абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе. Если же в процессе решения системы применяли неравносильные преобразования (возведение в квадрат обеих частей уравнения, умножение уравнений системы или преобразования, которые привели к расширению области определения какого-либо уравнения системы), то все найденные решения следует проверить подстановкой в исходную систему.

Сделаем некоторые комментарии к тем примерам, которые решены в учебнике.

В примере 1 применяется метод умножения, который заключается в том, что система уравнений

$$\begin{cases} p_1(x; y) = q_1(x; y), \\ p_2(x; y) = q_2(x; y) \end{cases}$$

заменяется системой

$$\begin{cases} p_1(x; y) = q_1(x; y), \\ p_1(x; y)p_2(x; y) = q_1(x; y)q_2(x; y). \end{cases}$$

Могут ли при таком переходе появиться посторонние решения? Да, если пара $(x_0; y_0)$ обращает в 0 и $p_1(x; y)$, и $q_1(x; y)$, то она автоматически является решением второй системы, но может и не быть решением первой системы (ведь совсем не обязательно должно выполняться равенство $p_2(x_0; y_0) = q_2(x_0; y_0)$). Поэтому в учебнике и говорится, что, поскольку в процессе решения системы использовался «ненадежный» (с точки зрения равносильности) метод умножения уравнений системы, найденные пары значений надо проверить подстановкой в заданную систему.

Кстати, примерно такая же фраза используется и в примере 2, где в системе уравнений одно из уравнений является иррациональным и в процессе преобразований на каком-то этапе применяется метод возведения в квадрат:

от уравнения

$$\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} = 1$$

переходим к уравнению

$$\frac{3x - 2y}{2x} = 1^2.$$

На самом деле, это преобразование является равносильным: во-первых, обе части первого уравнения неотрицательны, и, во-вторых, расширение области определения, хотя и происходит, не может привести к неприятностям, поскольку значения переменных, при которых выполняется неравенство

$$\frac{3x - 2y}{2x} < 0,$$

здесь явно не «проскочат».

В примере 3 впервые в курсе учащимся предлагается решить систему тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0,75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

Обратите их внимание на две специфические особенности, присущие именно системам тригонометрических уравнений.

Первая особенность: при их решении, как правило, неудобно использовать общие формулы, по которым решаются простейшие тригонометрические уравнения. Так, мы пришли к более простой системе уравнений

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

а затем вместо, казалось бы, напрашивающейся записи

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

предпочли переход к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n. \end{cases}$$

Дело в том, что ученики будут испытывать трудности с символом \pm (равно как и с символом $(-1)^n$, появляющимся в записи решений уравнения $\sin t = a$).

Вторая особенность, с которой сталкиваемся при решении тригонометрических систем, — это обязательное использование разных букв (n , k) для обозначения параметра в записи ре-

шений для каждого уравнения системы. Мы уже ранее отмечали, что учителей математики беспокоит вопрос: обязательно ли при записи различных серий решений тригонометрического уравнения использовать в качестве параметра разные буквы. Мы говорили, что если, например, тригонометрическое уравнение свелось к совокупности простейших уравнений $\cos x = 1$;

$\cos x = -\frac{1}{2}$ и ответ записан в виде $x = 2\pi k$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, — то это верно. Если бы ответ был записан в виде $x = 2\pi k$,

$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$, — то это тоже было бы верным. Но в системах тригонометрических уравнений дело обстоит иначе: там необходимо использовать различные обозначения для параметра в разных уравнениях системы, это носит принципиальный характер.

Завершается параграф примерами, в которых речь идет о решении систем с тремя-четырьмя переменными (в числе этих примеров и текстовые задачи).

В § 34 речь идет о решении уравнений и неравенств с параметрами. Подчеркнем, что различные задачи с параметрами в нашем курсе алгебры и начал математического анализа для профильной школы встречались довольно часто и в 10 классе, и во многих предыдущих параграфах задачника для 11 класса. Можно даже говорить о наличии некой содержательно-методической линии параметров. Причем начинается эта линия (в достаточно мягкой форме) в наших учебных комплектах для 7—9 классов.

К этой теме у учителей математики, как правило, особое отношение. Это в первую очередь связано с тем, что в последние годы стараниями вузовских приемных комиссий родился особый раздел элементарной математики — «конкурсная математика», — в котором уравнения и неравенства с параметрами занимают почетное место. Сразу скажем, что мы не ставили своей целью в учебнике для общеобразовательной школы построить теорию или основы теории решения уравнений и неравенств с параметрами. Решению уравнений и неравенств с параметрами посвящена масса учебно-методической литературы. Мы свою задачу видели в следующем: завершая изучение курса алгебры в школе, дать учащимся некоторое представление о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами. Для этого рассмотрен ряд примеров, но на уровень теоретических обобщений мы в учебнике сознательно не выходим. Сделаем это здесь.

Пусть дано уравнение $f(x; a) = 0$. Если ставится задача отыскать все такие пары $(x; a)$, которые удовлетворяют данному уравнению, то оно рассматривается как уравнение с дву-

мя равноправными переменными x и a . Но можно поставить и другую задачу, полагая переменные неравноправными. Дело в том, что если придать переменной a какое-либо фиксированное значение, то $f(x; a) = 0$ превращается в уравнение с одной переменной x и решения этого уравнения, естественно, зависят от выбранного значения a . Если уравнение $f(x; a) = 0$ нужно решить относительно переменной x , а под a понимается произвольное действительное число, то уравнение $f(x; a) = 0$ называют *уравнением с параметром a* . Основная трудность, связанная с решением уравнений (и тем более неравенств) с параметром, состоит в следующем. При одних значениях параметра уравнение не имеет решений, при других имеет бесконечно много решений, при третьих оно решается по одним формулам, при четвертых — по другим. Как все это учесть?

Уравнение с параметром — это, по сути дела, краткая запись бесконечного семейства уравнений. Каждое из уравнений семейства получается из данного уравнения с параметром при конкретном значении параметра. Поэтому задачу решения уравнения с параметром можно сформулировать следующим образом: *решить уравнение с параметром $f(x; a) = 0$ — это значит решить семейство уравнений, получающихся из уравнения $f(x; a) = 0$ при любых действительных значениях параметра.*

Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно, но тем не менее каждое уравнение из бесконечного семейства должно быть решено. Сделать это, например, можно, если по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра — множество действительных чисел или множество значений, заданное в условии задачи, — на подмножества, а затем заданное уравнение решить на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества полезно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходит *качественное изменение* уравнения. Такие значения параметра можно назвать *контрольными* или *особыми*. Искусство решения уравнения с параметрами как раз и состоит в том, чтобы уметь находить контрольные значения параметра. Посмотрим с этой точки зрения на примеры, разобранные в § 34.

Пример 1. а) Решить уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$.

Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в 0, так как при таких значениях невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x (а при иных значениях параметра такое деление

возможно; следовательно, меняется процедура решения уравнения, в этом и состоит *качественное изменение* уравнения). Это обуславливает разбиение множества значений параметра (множества действительных чисел) на два подмножества: $A_1 = \{0; 2\}$ и A_2 — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условиям $a \neq 0, a \neq 2$.

A_1 — конечное множество, поэтому можно по отдельности рассмотреть каждое значение параметра, принадлежащее множеству A_1 .

При $a = 0$ заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$; это уравнение не имеет корней.

При $a = 2$ заданное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$; этому уравнению удовлетворяют любые значения переменной x .

Если же параметр выбирается из множества A_2 , то коэффициент при x отличен от нуля и, следовательно, на этот коэффициент можно разделить обе части уравнения. Получим:

$$x = \frac{a - 2}{2a(a - 2)}, \text{ т. е. } x = \frac{1}{2a}.$$

Пример 1. 6) Решить неравенство $2a(a - 2)x > a - 2$.

Здесь опять контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в нуль. Но для оценки качественного изменения неравенства следует учесть, что процедура решения неравенства зависит от знака коэффициента при x . Если этот коэффициент положителен, то мы используем одну теорему о равносильности неравенств, постулирующую сохранение знака неравенства; если этот коэффициент отрицателен, то мы используем другую теорему, постулирующую изменение знака неравенства. Поэтому, осуществляя разбиение множества всех значений параметра (множества действительных чисел) на подмножества, целесообразно сохранить указанное выше множество A_1 , а множество остальных значений параметра разбить на три части: $A_2 = (-\infty; 0)$, $A_3 = (0; 2)$, $A_4 = (2; +\infty)$. Таким образом, для решения заданного неравенства надо рассмотреть не три случая, как это было выше при решении аналогичного уравнения, а пять:

1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $a < 0$; 4) $0 < a < 2$; 5) $a > 2$.

В первом случае (при $a = 0$) заданное неравенство принимает вид

$$0 \cdot x > -2;$$

этому неравенству удовлетворяют любые значения переменной x .

Во втором случае (при $a = 2$) заданное неравенство принимает вид

$$0 \cdot x > 0;$$

это неравенство не имеет решений.

В третьем (при $a < 0$) и в пятом случаях (при $a > 2$) коэффициент $2a(a - 2)$ положителен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, его знак следует оставить таким, каким он был:

$$x > \frac{a - 2}{2a(a - 2)}, \text{ т. е. } x > \frac{1}{2a}.$$

В четвертом случае (когда $0 < a < 2$) коэффициент $2a(a - 2)$ отрицателен, значит, деля на него обе части заданного неравенства, его знак следует изменить на противоположный:

$$x < \frac{a - 2}{2a(a - 2)}, \text{ т. е. } x < \frac{1}{2a}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x^2 обращается в нуль. Дело в том, что если этот коэффициент равен нулю, то уравнение превращается в линейное и решается по соответствующему алгоритму; если же этот коэффициент отличен от нуля, то имеем квадратное уравнение, которое решается по иному алгоритму (меняется процедура решения, в этом и состоит *качественное изменение уравнения*). Контрольным является значение $a = 1$. Это обуславливает разбиение множества значений параметра (множества действительных чисел) на два подмножества: $A_1 = \{1\}$ и A_2 — множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условию $a \neq 1$.

В первом случае (при $a = 1$) уравнение принимает следующий вид: $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т. е. $6x + 7 = 0$. Решив это линейное уравнение, получим: $x = -\frac{7}{6}$.

Во втором случае (при $a \neq 1$) имеем квадратное уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Найдем его дискриминант: $D = 4(5a + 4)$. Дальнейшие рассуждения зависят от значения дискриминанта. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два корня. Дискри-

минант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$ (можно сказать, что это — второе контрольное значение параметра; при переходе через него происходит *качественное изменение уравнения* — меняется число корней уравнения). Следовательно, указанное выше множество A_2 , в свою очередь, целесообразно разбить на три подмноже-

ства: $A_3 = \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$, $A_4 = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$, $A_5 = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

Если $a < \frac{4}{5}$, то $D < 0$ и, следовательно, квадратное уравнение не имеет корней.

Если $a > \frac{4}{5}$ (но напомним, $a \neq 1$), то $D > 0$ и, значит, квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{5a + 4}}{a - 1}.$$

Если $a = -\frac{4}{5}$, то $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

В нашем курсе алгебры начиная с 7 класса приоритетной является, как мы постоянно подчеркиваем, функционально-графическая линия. При решении задач с параметрами графические модели часто оказываются более эффективными, чем аналитические. Это наглядно демонстрируют примеры 3 и 4, разобранные в учебнике, и достаточно трудные упражнения из задачника, разобранные ниже.

§ 26. Равносильность уравнений

26.16. Найти целочисленный корень уравнения:

$$a) \frac{\log_2(7 + 6x - x^2) - \log_2(x - 2)}{10x - 24 - x^2} = 2;$$

$$б) \frac{\log_{12}(6 + 5x - x^2)}{x^2 - 9x + 20} = 2^{-\sqrt{x-2}}.$$

Решение. «Экзотический» вид уравнений и само задание — найти только целочисленные корни — заставляют отойти от традиционной алгоритмической схемы решения и искать какие-то обходные пути.

а) Найдем ОДЗ, которая задается системой условий

$$\begin{cases} 7 + 6x - x^2 > 0, \\ x - 2 > 0, \\ 10x - 24 - x^2 \neq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $2 < x < 7$, $x \neq 4$, $x \neq 6$. Значит, в ОДЗ есть лишь две целочисленные точки: 3 и 5, — и только они могут быть целочисленными корнями данного уравнения.

Подставим в уравнение значение $x = 3$. Получим:

$$\frac{\log_2(7 + 18 - 9) - \log_2(3 - 2)}{30 - 24 - 9} = 2; \quad -\frac{4}{3} = 2.$$

Это — неверное равенство, следовательно, $x = 3$ не является корнем уравнения.

Подставим в уравнение значение $x = 5$. Получим:

$$\frac{\log_2(7 + 30 - 25) - \log_2(5 - 2)}{50 - 24 - 25} = 2; \quad 2 = 2.$$

Это — верное равенство, значит, $x = 5$ является корнем уравнения.

б) Найдем ОДЗ, которая задается системой условий

$$\begin{cases} 6 + 5x - x^2 > 0, \\ x \geq 2, \\ x^2 - 9x + 20 \neq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $2 \leq x < 6$, $x \neq 4$, $x \neq 5$. Значит, в ОДЗ есть лишь две целочисленные точки: 2 и 3.

Подставим в уравнение значение $x = 2$. Получим:

$$\frac{\log_{12}(6 + 10 - 4)}{4 - 18 + 20} = 2^{-\sqrt{2-1}}; \quad \frac{1}{6} = 1.$$

Это — неверное равенство, следовательно, $x = 2$ не является корнем уравнения.

Подставим в уравнение значение $x = 3$. Получим:

$$\frac{\log_{12}(6 + 15 - 9)}{9 - 27 + 20} = 2^{-\sqrt{3-1}}; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Это — верное равенство, значит, $x = 3$ — корень уравнения.

Ответ: а) 5; б) 3.

26.17. 6) Сколько имеется натуральных значений параметра a , при которых уравнение $(\log_3(2x - 11) - 1)(x^2 - a^2) = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Следствием данного уравнения является совокупность уравнений: $\log_3(2x - 11) - 1 = 0$; $x^2 - a^2 = 0$. Решениями этой совокупности являются числа 7, a , $-a$. ОДЗ исходного уравнения задается неравенством $x > 5,5$. Если $a = 1, 2, 3, 4, 5$, то числа a и $-a$ не удовлетворяют указанному неравенству и, следовательно, для заданного уравнения являются посторонними корнями. Если $a = 7$, то второе уравнение совокупности имеет корни 7 и -7 , а заданное уравнение имеет единственный корень 7. При остальных натуральных значениях параметра (6, 8, 9, ...) заданное уравнение имеет два корня: 7 и a . Значит, всего имеется шесть натуральных значений параметра a , удовлетворяющих условию задачи: 1, 2, 3, 4, 5 и 7.

§ 27. Общие методы решения уравнений

27.37. а) Решить уравнение

$$\sin x \cos x - 6 \sin x + 6 \cos x + 6 = 0.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на 2, преобразуем его к виду

$$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0. \quad (1)$$

Положим $y = \sin x - \cos x$ и воспользуемся тем, что

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x.$$

Это значит, что $\sin 2x = 1 - y^2$; теперь уравнение (1) примет вид $1 - y^2 - 12y + 12 = 0$, т. е. $y^2 + 12y - 13 = 0$, откуда находим два корня: 1 и -13.

Уравнение $\sin x - \cos x = -13$ корней не имеет, а из уравнения $\sin x - \cos x = 1$ получим: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = \pi + 2\pi n$.

27.39. а) Решить уравнение $2^x \cdot 5^{\frac{1+x}{x}} = 50$.

Решение. Учтем, что $50 = 2 \cdot 5^2$, и разделим обе части уравнения на 5^2 и на 2^x . Получим:

$$5^{\frac{1+x}{x}-2} = 2^{1-x};$$

$$5^{\frac{1-x}{x}} = 2^{1-x}.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5:

$$\frac{1}{x} = \log_5 2^{1-x}.$$

Далее последовательно получаем:

$$1 - x = x(1 - x)\log_5 2;$$

$$(1 - x)(1 - x \log_5 2) = 0;$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{\log_5 2} = \log_2 5.$$

27.54. б) Решить уравнение $-\cos 7\pi x = x^2 - 6x + 10$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$-\cos 7\pi x = (x - 3)^2 + 1.$$

Очевидно, что

$$\begin{cases} -\cos 7\pi x \leq 1, \\ (x - 3)^2 + 1 > 1. \end{cases}$$

Следовательно, корнем заданного уравнения может быть только такое число, которое одновременно обращает оба неравенства системы в равенства. Это — число 3.

Ответ: 3.

27.55. а) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2 + 1} + \log_3 \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 2.$$

Очевидно, что

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + 1} > 1, \\ \log_3 \sqrt{(x-1)^2 + 9} > \log_3 \sqrt{9} = 1. \end{cases}$$

Значит, корнем заданного уравнения может быть только такое число, которое одновременно обращает оба неравенства системы в равенства. Это — число 1.

Ответ: 1.

Аналогично решается № 27.55, б) и 27.56.

27.57. б) Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}^4(x^3 + 2x^2 - x - 2) + \sqrt[3]{x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 3} = 0.$$

Решение. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю. Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}^4(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0, \\ \sqrt[3]{x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 3} = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, \\ x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0; (x+2)(x^2-1) = 0; x_1 = -2; x_2 = 1; x_3 = -1.$$

Из этих трех значений второму уравнению последней системы удовлетворяют лишь значения $x = \pm 1$. Это — два корня заданного уравнения.

28. Равносильность неравенств

28.49. а) Решить неравенство

$$(x^2 - 2x)(\operatorname{tg}^2 x + 2^{x+1}) < 0.$$

Решение. Выражение $\operatorname{tg}^2 x + 2^{x+1}$ положительно при всех $x \neq \frac{\pi}{2}$ пл. Решив неравенство

$$x^2 - 2x < 0,$$

получим $0 < x < 2$. В этот промежуток попадает одно из указанных выше «запрещенных» значений x , а именно $x = \frac{\pi}{2}$. В итоге имеем:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{2} < x < 2.$$

28.50. Решить неравенство $\log_{x+2}(x^2 - 4x + 1) > \log_{\frac{x-5}{x-6}} 1$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-5}{x-6} > 0, \\ \frac{3x-5}{x-6} \neq 1, \\ x+2 > 1, \\ x^2 - 4x + 1 > 0, \\ x^2 - 4x + 1 > 1; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-5}{x-6} > 0, \\ \frac{3x-5}{x-6} \neq 1, \\ 0 < x+2 < 1, \\ x^2 - 4x + 1 > 0, \\ x^2 - 4x + 1 < 1. \end{array} \right.$$

Во второй системе третье и пятое неравенства несовместны, значит, система не имеет решений. Решив первую систему (в ней можно опустить четвертое неравенство — как следствие пятого неравенства системы), получим: $-1 < x < -\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} < x < 0$; $x > 6$.

28.51. Решить неравенство

$$(12x^3 - 16x^2 - 7x + 6)(\log_{\frac{1}{3}}(4 - 2x) + \log_3(x + 2)) > 0.$$

Решение. Целыми корнями многочлена $12x^3 - 16x^2 - 7x + 6$ могут быть только делители числа 6, т. е. числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, но проверка показывает, что ни одно из них не является корнем уравнения $12x^3 - 16x^2 - 7x + 6 = 0$. Положим в этом уравнении $x = \frac{1}{y}$, тогда после понятных преобразований уравнение примет вид $6y^3 - 7y^2 - 16y + 12 = 0$. Это уравнение имеет целый корень

$y_1 = 2$. Разделив многочлен $6y^3 - 7y^2 - 16y + 12$ на $y - 2$, получим квадратный трехчлен $6y^2 + 5y - 6$ с корнями $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$. Значит, ис-

ходный многочлен имеет три корня: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$; он разлагается на множители следующим образом:

$$12x^3 - 16x^2 - 7x + 6 = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right).$$

Выясним, когда обращается в нуль выражение

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(4 - 2x) + \log_3(x + 2):$$

$$-\log_3(4 - 2x) + \log_3(x + 2) = 0; x + 2 = 4 - 2x; x = \frac{2}{3}.$$

Область определения выражения $g(x)$ — интервал $(-2; 2)$. На этом интервале функция $y = g(x)$ непрерывна и обращается в нуль в единственной точке $x = \frac{2}{3}$. Значит, она сохраняет посто-

янный знак на интервале $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ и на интервале $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. Эти знаки можно определить, выбрав по произвольной точке из каждого интервала. В точке $x = 0$ имеем $g(0) < 0$ (поскольку $g(0) = -\log_3 4 + \log_3 2$); значит, на интервале $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ выполняется неравенство $g(x) < 0$. В точке $x = 1$ имеем $g(1) > 0$ (поскольку $g(1) = -\log_3 2 + \log_3 3$); значит, на интервале $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ выполняется неравенство $g(x) > 0$. Но точно такие же знаки имеет на рассматриваемых интервалах выражение $x - \frac{2}{3}$, значит, мы имеем право в заданном неравенстве заменить множитель $g(x)$ выражением $x - \frac{2}{3}$ с дополнительным условием: $-2 < x < 2$.

Таким образом, заданное комбинированное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) > 0, \\ -2 < x < 2. \end{cases}$$

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 72), находим решения заданного неравенства:

$$-2 < x < -\frac{2}{3}; \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}; \frac{3}{2} < x < 2.$$

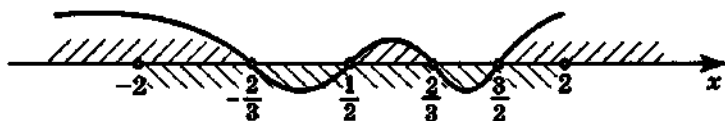


Рис. 72

28.52. Решить неравенство

$$\log_8 \log_9 \log_{7x+6} ((7x+6)^9 + x^2 - x - 56) > 0.$$

Решение. Заданное неравенство равносильно неравенству $\log_9 \log_{7x+6} ((7x+6)^9 + x^2 - x - 56) > 1$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $\log_{7x+6} ((7x+6)^9 + x^2 - x - 56) > 9$. Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 7x+6 > 1, \\ (7x+6)^9 + x^2 - x - 56 > (7x+6)^9; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 7x+6 < 1, \\ (7x+6)^9 + x^2 - x - 56 < (7x+6)^9, \\ (7x+6)^9 + x^2 - x - 56 > 0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x > 8$. Рассмотрим вторую систему. Из ее первого неравенства находим: $-\frac{6}{7} < x < -\frac{5}{7}$. Тогда

$0 < (7x+6)^9 < 1$, $0 < x^2 < 1$, $\frac{5}{7} < -x < \frac{6}{7}$, а потому $(7x+6)^9 + x^2 - x - 56 < 0$. Значит, первое и третье неравенства второй системы несовместны, вторая система не имеет решений.

Ответ: $x > 8$.

28.53. Решить неравенство $(x^2 - x + 1)^{\frac{x-11}{x-4}} < (x^2 - x + 1)^3$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 1, \\ \frac{x-11}{x-4} < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x^2 - x + 1 < 1, \\ \frac{x-11}{x-4} > 3. \end{cases}$$

Ответ: $x < 0$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $x > 4$.

28.54. Решить неравенство:

а) $\sqrt{\sin x - 1} \leq 4 - x^2$; б) $\sqrt{\cos x - 1} \geq x^2 - 49$.

Решение. а) Левая часть неравенства имеет смысл лишь при условии, что $\sin x = 1$, при этом она обращается в нуль и неравенство принимает вид $0 < 4 - x^2$. Таким образом, задача сводится к решению смешанной системы

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ 4 - x^2 > 0, \end{cases}$$

т. е., по сути дела, к отбору корней уравнения $\sin x = 1$, принадлежащих отрезку $[-2; 2]$.

Решив уравнение $\sin x = 1$, получим: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Из этой серии отрезку $[-2; 2]$ принадлежит только корень $x = \frac{\pi}{2}$.

б) Левая часть неравенства имеет смысл лишь при условии, что $\cos x = 1$, при этом она обращается в нуль и неравенство принимает вид $0 > x^2 - 49$. Таким образом, задача сводится к решению смешанной системы

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 - 49 < 0, \end{cases}$$

т. е. к отбору корней уравнения $\cos x = 1$, принадлежащих отрезку $[-7; 7]$.

Решив уравнение $\cos x = 1$, получим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Из этой серии отрезку $[-7; 7]$ принадлежат числа $0, \pm 2\pi$.

28.55. а) Решить неравенство $6 \log_3 |x - 1| < 14 + 2x - x^2$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$$3 \log_3 (x - 1)^2 < 15 - (x - 1)^2$$

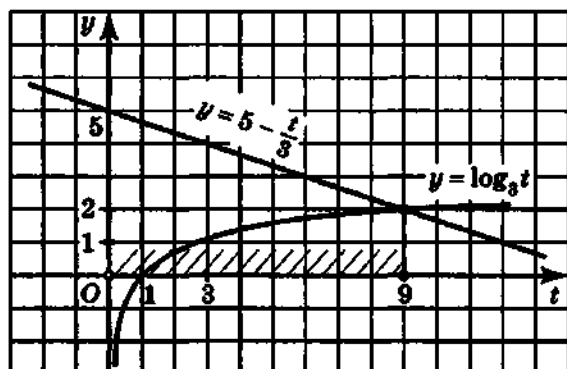


Рис. 73

и введем новую переменную $t = (x - 1)^2$. Получим неравенство $3 \log_3 t \leq 15 - t$, т. е. $\log_3 t \leq 5 - \frac{t}{3}$, которое сравнительно нетрудно решается графически (рис. 73); получаем: $0 < t \leq 9$ и далее

$$\begin{aligned} 0 < (x - 1)^2 &\leq 9; \\ -2 < x < 1; \quad 1 < x &\leq 4. \end{aligned}$$

28.56. 6) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_{\sqrt{5}} \sqrt{x}} \leq \sqrt{\log_3 243 x} - \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{27}{x}}.$$

Решение. Воспользовавшись различными свойствами логарифма, преобразуем неравенство к виду

$$\sqrt{\log_3 x} \leq \sqrt{\log_3 x + 5} - \sqrt{\log_3 x - 3}$$

и введем новую переменную $t = \log_3 x$. Решим полученное иррациональное неравенство $\sqrt{t} + \sqrt{t - 3} \leq \sqrt{t + 5}$:

$$\begin{cases} t \geq 3, \\ 2t - 3 + 2\sqrt{t^2 - 3t} \leq t + 5; \\ t \geq 3, \\ 2\sqrt{t^2 - 3t} \leq 8 - t; \\ 3 \leq t \leq 8, \\ 4(t^2 - 3t) \leq (8 - t)^2. \end{cases}$$

Из последней системы находим: $3 \leq t \leq 4$. Значит,

$$3 \leq \log_3 x \leq 4; \quad 27 \leq x \leq 81.$$

28.57. Решить неравенство:

$$\text{а) } \frac{(x^2 + x + 1)^2 + 2(x^3 + x^2 + x) - 3x^2}{10x^2 - 17x - 6} > 0;$$

$$\text{б) } \frac{(x^2 - x - 1)^2 - 2(x^3 - x^2 - x) - 3x^2}{10x^4 - 43x^3 - 9x^2} < 0.$$

Решение. а) Введем в числителе дроби новую переменную $a = x^2 + x + 1$. Тогда числитель примет вид $a^2 + 2ax - 3x^2$. Разложив этот трехчлен на множители, получим $(a - x)(a + 3x)$. Вернувшись к переменной x , получим в числителе заданной дроби: $(x^2 + 4x + 1)(x^2 + 1) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + 1)$, где $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

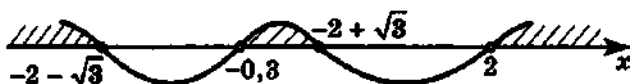


Рис. 74

Квадратный трехчлен $10x^2 - 17x - 6$ имеет два корня: 2 и $-0,3$. Значит, $10x^2 - 17x - 6 = 10(x - 2)(x + 0,3)$. Теперь заданное неравенство можно переписать в виде $\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + 1)}{10(x - 2)(x + 0,3)} > 0$

и решить методом интервалов (рис. 74).

б) Введем в числителе дроби новую переменную $a = x^2 - x - 1$. Тогда числитель примет вид $a^2 - 2ax - 3x^2$. Разложив этот трехчлен на множители, получим $(a - 3x)(a + x)$. Вернувшись к переменной x , получим в числителе заданной дроби:

$$(x^2 - 4x - 1)(x^2 - 1) = (x - x_1)(x - x_2)(x + 1)(x - 1),$$

где $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$.

Квадратный трехчлен $10x^2 - 43x + 9$ имеет два корня: 4,5 и $-0,2$. Значит, $10x^2 - 43x + 9 = 10x^2(x - 4,5)(x + 0,2)$. Теперь заданное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x + 1)(x - 1)}{10x^2(x - 4,5)(x + 0,2)} < 0$$

и решить методом интервалов (рис. 75).

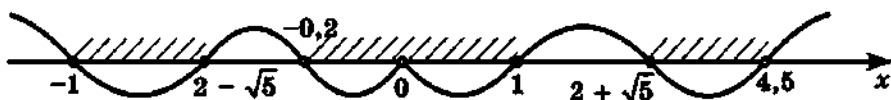


Рис. 75

Ответ:

а) $x \leq -2 - \sqrt{3}$, $-0,3 < x \leq -2 + \sqrt{3}$, $x > 2$;

б) $-1 \leq x \leq 2 - \sqrt{5}$, $-0,2 < x < 0$, $0 < x < 1$,
 $2 + \sqrt{5} \leq x < 4,5$.

28.58. Решить неравенство:

а) $(x^2 + 8x + 15)\log_{0,5}\left(1 + \cos^2 \frac{\pi x}{4}\right) > 1$;

б) $(10x - x^2 - 24)\log_5\left(4\sin^2 \frac{\pi x}{2} + 1\right) > 1$.

Решение.

$$а) x^2 + 8x + 15 = (x + 4)^2 - 1 > -1; 1 < 1 + \cos^2 \frac{\pi x}{4} < 2,$$

значит, $-1 < \log_{0,5} \left(1 + \cos^2 \frac{\pi x}{4} \right) < 0$. Если $a > -1$, $-1 < b < 0$, то

неравенство $ab > 1$ может выполняться только «на стыке», т. е. при $a = -1$, $b = -1$. Значит, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (x + 4)^2 - 1 = -1, \\ \log_{0,5} \left(1 + \cos^2 \frac{\pi x}{4} \right) = -1, \end{cases}$$

откуда получаем: $x = -4$.

$$б) 10x - x^2 - 24 = 1 - (x - 5)^2 < 1; 1 < 4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} + 1 < 5,$$

значит, $0 < \log_5 \left(4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} + 1 \right) < 1$. Если $a < 1$, $0 < b < 1$, то не-

равенство $ab > 1$ может выполняться только «на стыке», т. е. при $a = 1$, $b = 1$. Значит, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 1 - (x - 5)^2 = 1, \\ \log_5 \left(4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} + 1 \right) = 1, \end{cases}$$

откуда получаем: $x = 5$.

§ 29. Уравнения и неравенства с модулями

29.5. б) Для каждого значения параметра p определить число корней уравнения $|2x - x^2| = \log_5 p$.

Решение. Ясно, что уравнение не имеет корней при $p < 0$. Пусть $p > 0$.

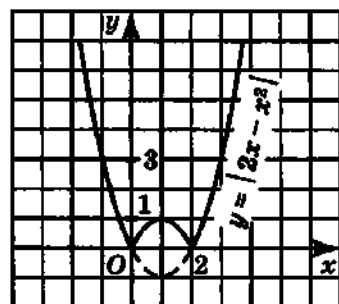


Рис. 76

Построим график функции $y = |2x - x^2|$ (рис. 76). Опираясь на чертеж, делаем вывод:

1) корней нет, если $\log_5 p < 0$, т. е. $0 < p < 1$; 2) уравнение имеет два корня, если $\log_5 p = 0$ или $\log_5 p > 1$, т. е. если $p = 1$ или $p > 5$; 3) уравнение имеет три корня, если $\log_5 p = 1$, т. е. если $p = 5$; 4) уравнение имеет четыре корня, если $0 < \log_5 p < 1$, т. е. если $1 < p < 5$.

29.6. Найти все значения параметра p , при каждом из которых: а) существует только один корень уравнения $|x - 1| = p$, удовлетворяющий неравенству $x^2 \geq 4$; б) существует корень уравнения $|x - 1| = p$, удовлетворяющий неравенству $x^2 \geq 4$; в) не существует корней уравнения $|x - 1| = p$, удовлетворяющих неравенству $x^2 \geq 4$; г) уравнение $|x - 1| = p$ имеет корни и все они удовлетворяют неравенству $x^2 \geq 4$.

Решение. а) По смыслу задачи уравнение должно иметь хотя бы один корень, значит, $p \geq 0$. В этом случае уравнение имеет корни $x_1 = 1 + p$, $x_2 = 1 - p$.

По условию только один из этих корней должен удовлетворять совокупности неравенств $x < -2$; $x > 2$. Это возможно в двух случаях: 1) если $1 - p < -2$, но в то же время $-2 < 1 + p < 2$; 2) если $1 + p \geq 2$, но в то же время $-2 < 1 - p < 2$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 1 - p < -2, \\ -2 < 1 + p < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + p \geq 2, \\ -2 < 1 - p < 2. \end{cases}$$

Решив эту совокупность, получим $1 < p < 3$.

б) По смыслу задачи уравнение должно иметь хотя бы один корень, значит, $p \geq 0$. В этом случае уравнение имеет корни $x_1 = 1 + p$, $x_2 = 1 - p$. Предположим, что ни один из них не удо-

влетворяет заданному неравенству. Это значит, что $\begin{cases} 1 - p > -2, \\ 1 + p < 2, \end{cases}$ т. е. $p < 1$.

Значит, при $p \geq 1$ выполняется противоположное, т. е. хотя бы один корень удовлетворяет заданному неравенству.

в) Ответ фактически получен при решении пункта б): $p < 1$.

г) Оба корня уравнения удовлетворяют заданному неравенству, если $\begin{cases} 1 - p \leq -2, \\ 1 + p \geq 2, \end{cases}$ т. е. при $p \geq 3$.

29.10. 6) Решить уравнение

$$|\log_3 (3x - 2) + \log_3 (2x - 1)| = \log_3 (2x - 1).$$

Решение. Уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\begin{cases} \log_3 (3x - 2) + \log_3 (2x - 1) \geq 0, \\ \log_3 (3x - 2) + \log_3 (2x - 1) = \log_3 (2x - 1); \\ \log_3 (3x - 2) + \log_3 (2x - 1) < 0, \\ \log_3 (3x - 2) + \log_3 (2x - 1) = -\log_3 (2x - 1). \end{cases}$$

Уравнение первой системы имеет корень $x = 1$, он удовлетворяет и неравенству первой системы. Рассмотрим вторую систему.

Решив логарифмическое неравенство, получим: $\frac{2}{3} < x < 1$. Уравнение системы после потенцирования принимает вид $(2x - 1)^2 \times (3x - 2) = 1$. В интервале $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ выполняются неравенства $0 < (2x - 1)^2 < 1$ и $0 < 3x - 2 < 1$. Но тогда $0 < (2x - 1)^2(3x - 2) < 1$, а потому уравнение $(2x - 1)^2(3x - 2) = 1$ не имеет корней в рассматриваемом интервале.

О т в е т: 1.

29.11. Решить уравнение:

$$б) |\cos 3x| = -\cos x; \quad г) |\sin 5x| = -\sin x.$$

Р е ш е н и е. При решении подобных уравнений возможны два способа рассуждений, покажем оба: первый — при решении пункта б), второй — при решении пункта г).

б) Уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\begin{cases} \cos 3x > 0, \\ \cos 3x + \cos x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 3x < 0, \\ \cos 3x - \cos x = 0. \end{cases}$$

Уравнение первой системы преобразуем к виду $2 \cos 2x \cos x = 0$, откуда находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Проверим каждое из указанных решений по условию $\cos 3x > 0$:

$$1) \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi n \right) > 0, \text{ т. е. } 0 > 0 \text{ — это верно.}$$

2) $\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2} \right) > 0$; это верно при $n = 1, 2, 5, 6, \dots, -2, -3, -6, -7, \dots$; точнее можно сказать так: неравенство верно, если $n = 4k + 1, 4k + 2, k \in \mathbb{Z}$. При этих значениях вторая из указанных выше серий сводится к двум сериям: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4k + 1)$,

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4k + 2), \text{ т. е. } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

Итак, первая система имеет следующие решения:

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Впрочем, первую и вторую серии можно объединить:

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Уравнение второй системы преобразуем к виду $-2 \sin 2x \sin x = 0$,

откуда находим $x = \frac{\pi n}{2}$. Должно выполняться условие $\cos \frac{3\pi n}{2} < 0$.

Это верно при $n = 2, 6, 10, \dots, -2, -6, \dots$ т. е. при $n = 4k + 2$,

$k \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = \frac{\pi}{2}(4k + 2) = \pi + 2\pi k$.

г) Уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin^2 5x = \sin^2 x. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$1 - \cos 10x = 1 - \cos 2x;$$

$$\cos 10x - \cos 2x = 0;$$

$$-2 \sin 4x \sin 6x = 0;$$

$$x = \frac{\pi n}{4} \text{ или } x = \frac{\pi n}{6}.$$

Проверим первую серию по условию $\sin x < 0$. Изобразим эту серию точками на числовой окружности. Их восемь, указанному условию удовлетворяют пять из них (отмечены на рис. 77). Их можно охарактеризовать с помощью следующих соотношений:

$$x = \pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Проверим вторую серию по условию $\sin x < 0$. Изобразим эту серию точками на числовой окружности. Их двенадцать, указанному условию удовлетворяют семь из них (отмечены на рис. 78).

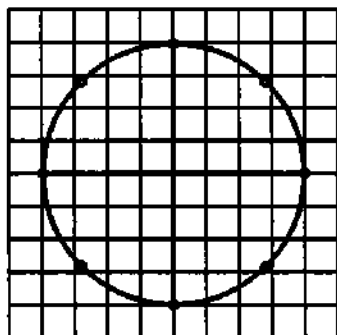


Рис. 77

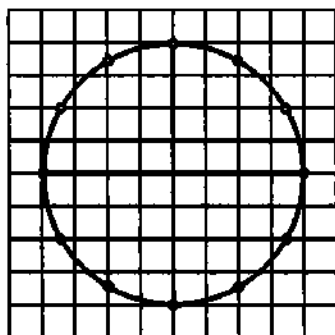


Рис. 78

Их можно охарактеризовать с помощью следующих соотношений:

$$x = \pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

О т в е т: б) $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \pi + 2\pi k;$

г) $x = \pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

29.18. Решить уравнение:

б) $|\sin 3x + \cos 3x| + |\cos 6x| = 0;$

г) $|\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x| + \left|1 - \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)\right| = 0.$

Решение. б) Уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = 0, \\ \cos 6x = 0. \end{cases}$$

Но $\cos 6x = (\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x)$, значит, второе уравнение системы является следствием первого и его можно опустить. Остается решить первое уравнение:

$$\operatorname{tg} 3x + 1 = 0, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}.$$

г) Уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 0, \\ \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. Первое уравне-

ние преобразуем к виду $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Подставим найденное решение второго уравнения системы в левую часть последнего уравнения:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3\left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \pi n\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом, решение второго уравнения системы является и решением первого уравнения системы, а потому является решением системы.

$$\text{Ответ: б) } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{8}; \text{ г) } x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{8}.$$

29.19. Доказать, что уравнение $|f(x)| + |h(x)| = f(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) = 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть x — решение заданного уравнения. Правая часть уравнения как сумма двух неотрицательных выражений неотрицательна: $f(x) \geq 0$. Но тогда $|f(x)| = f(x)$ и заданное уравнение принимает вид $|h(x)| = 0$, т. е. $h(x) = 0$. Итак, каждое решение заданного уравнения является и решением системы.

Обратно, пусть x — решение системы, подставим его в заданное уравнение. Так как $h(x) = 0$, то заданное уравнение примет вид $|f(x)| = f(x)$, а это верно, поскольку $f(x) \geq 0$.

29.20. Решить уравнение:

$$\text{б) } \left| \frac{\sin 2x}{x+4} \right| + |x^2 - 5x - 24| = -\frac{\sin 2x}{x+4};$$

$$\text{г) } \left| \frac{x}{\sin x} \right| + |3 \sin x - \sin 3x| = \frac{x}{\sin x}.$$

Решение. б) Можно воспользоваться утверждением, доказанным в № 29.19.

Согласно этому утверждению уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 24 = 0, \\ -\frac{\sin 2x}{x+4} > 0. \end{cases}$$

Уравнение этой системы имеет два корня: 8 и -3. При $x = 8$ неравенство системы сводится к неравенству $\sin 16 < 0$, что верно, поскольку точка 16 принадлежит третьей четверти числовой окружности. При $x = -3$ неравенство системы сводится к неравенству $\sin 6 > 0$, что неверно, поскольку точка 6 принадлежит четвертой четверти числовой окружности.

Итак, уравнение имеет единственный корень $x = 8$.

г) Уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} 3 \sin x - \sin 3x = 0, \\ \frac{x}{\sin x} > 0. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы: $3 \sin x - (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi n$. Неравенству системы найденные значения не удовлетворяют, значит, система, а с ней и заданное уравнение не имеют решений.

29.21. Доказать, что уравнение $|f(x)| + |h(x)| = f(x) + h(x)$ равносильно системе
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Правая часть уравнения как сумма двух неотрицательных выражений неотрицательна. Значит, хотя бы одно слагаемое неотрицательно, например, $f(x) \geq 0$. Но тогда $|f(x)| = f(x)$ и заданное уравнение принимает вид $|h(x)| = h(x)$, откуда следует, что $h(x) \geq 0$. Итак, каждое решение заданного уравнения является и решением системы.

Обратно, если $f(x) \geq 0$ и $h(x) \geq 0$, то $|f(x)| = f(x)$, $|h(x)| = h(x)$, а потому $|f(x)| + |h(x)| = f(x) + h(x)$.

Этой теоремой можно воспользоваться при решении № 29.22.

29.23. Доказать, что уравнение $|f(x)| + |h(x)| = |f(x) + h(x)|$ равносильно неравенству $f(x)h(x) \geq 0$.

Решение. Как известно, справедливо неравенство $|a| + |b| \geq |a + b|$, при этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда оба числа либо неотрицательны, либо неположительны. Оба случая объединяются условием $ab \geq 0$.

29.24. в) Решить уравнение

$$|x^3 + 3x^2 - x - 3| + |2x^2 - x^3 + 7x + 4| = |5x^2 + 6x + 1|.$$

Решение. Можно воспользоваться теоремой из № 29.23. Согласно ей заданное уравнение равносильно неравенству $(x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) \leq 0$. Так как $(x^3 + 3x^2 - x - 3) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$, а $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = (x + 1)^2(x - 4)$, то неравенство принимает вид $(x - 1)(x + 3)(x + 1)^2(x - 4) \leq 0$. Решив его методом интервалов (рис. 79), получим: $-3 \leq x \leq -1$, $1 \leq x \leq 4$.

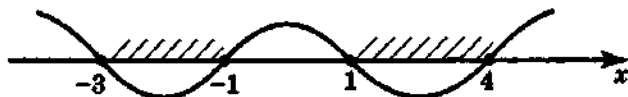


Рис. 79

Теоремой из № 29.23 можно воспользоваться и при решении № 29.25.

29.52. б) Решить неравенство

$$|x^2 + 2x| < \left| x^2 + x - \frac{\sqrt{1-x}}{x} \right| + \left| x + \frac{\sqrt{1-x}}{x} \right|.$$

Решение. Неравенство имеет структуру $|a + b| < |a| + |b|$, что верно для любых a, b . Значит, заданное неравенство верно для любых допустимых значений x .

Ответ: $x < 0$; $0 < x \leq 1$.

29.54. Решить неравенство:

$$\text{б) } \left| x^2 - \frac{1}{x} \right| + \left| x^2 + \frac{5}{x^3 - 3} \right| > \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3 - 3} \right|;$$

$$\text{г) } \left| x^2 - \frac{1}{x} \right| + \left| x^2 + \frac{5}{x^3 - 3} \right| < \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3 - 3} \right|.$$

Указание. б) Неравенство имеет структуру $|a| + |b| > |b - a|$. Известно, что $|b - a| \leq |b| + |-a|$, т. е. $|b - a| \leq |a| + |b|$. При этом знак $<$ имеет место тогда и только тогда, когда числа b и $-a$ противоположны по знаку, т. е. $b(-a) < 0$ или, что то же самое, $ab > 0$. Таким образом, заданное неравенство равносильно неравенству

$$\left(x^2 - \frac{1}{x} \right) \left(x^2 + \frac{5}{x^3 - 3} \right) > 0.$$

г) Рассуждая как в пункте б), приходим к неравенству

$$\left(x^2 - \frac{1}{x} \right) \left(x^2 + \frac{5}{x^3 - 3} \right) \leq 0.$$

Ответ: б) $x < -\sqrt{3}$, $0 < x < 1$, $x > \sqrt{3}$;

г) $-\sqrt{3} < x < 0$, $1 \leq x < \sqrt{3}$.

29.57. б) Найти все значения параметра a , при которых уравнение $2|x - 5| - |x + 6| = 2a - 1$ имеет единственный корень.

Решение. Построим (схематически, рис. 80) график функции $y = 2|x - 5| - |x + 6|$, т. е. график кусочной функции

$$y = \begin{cases} 16 - x, & \text{если } x < -6, \\ 4 - 3x, & \text{если } -6 \leq x < 5, \\ x - 16, & \text{если } x \geq 5. \end{cases}$$

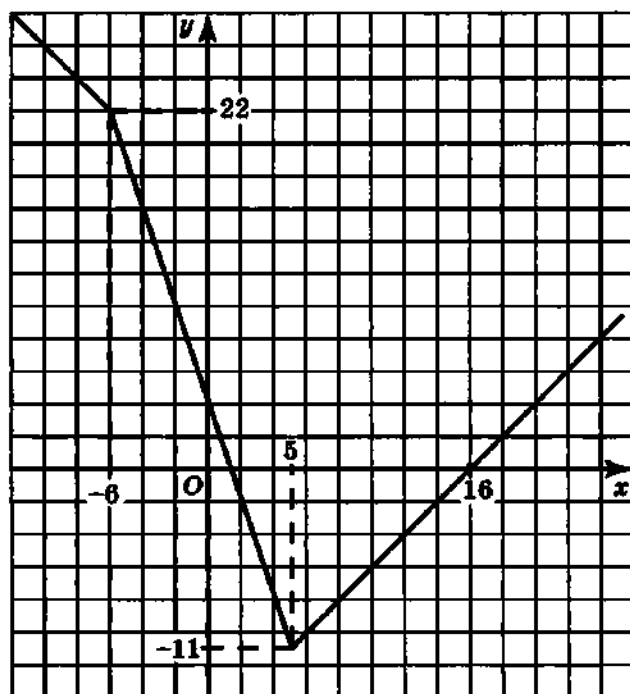


Рис. 80

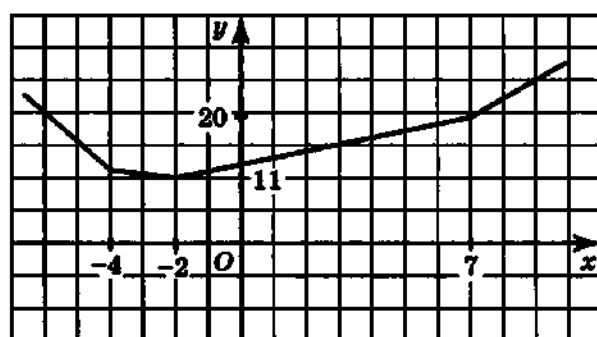


Рис. 81

Прямая $y = 2a - 1$ имеет с построенной ломаной одну точку пересечения лишь в случае, когда $2a - 1 = -11$, т. е. при $a = -5$.

29.59. Найти все значения параметра t , при которых неравенство $|x + 2| + |x - 7| + |x + 4| \geq t$ выполняется: а) для любых значений x ; б) хотя бы для одного значения x ; в) для любых значений $x < -7$; г) для любых значений $x > -1$.

Решение. График функции $y = |x + 2| + |x - 7| + |x + 4|$ — это ломаная, состоящая из четырех участков. Схематически эту ломаную можно построить, используя «стыковые» точки -4 , -2 , 7 . Имеем $y(-4) = 13$, $y(-2) = 11$, $y(7) = 20$. Отметим точки $(-4; 13)$, $(-2; 11)$, $(7; 20)$ на координатной плоскости и схематически построим график функции (рис. 81). Далее можно опираться на построенный график.

а) $y > t$ для любого x , если $t < 11$.

б) $y > t$ хотя бы для одного x ; это верно при любом t .

в) Имеем $y(-7) = 22$; если $x < -7$, то $y > 22$. Значит, неравенство будет выполняться для любых значений $x < -7$, если $t < 22$.

г) Имеем $y(-1) = 12$; если $x > -1$, то $y \geq 12$. Значит, неравенство будет выполняться для любых значений $x > -1$, если $t < 12$.

29.60. Найти наименьшее значение функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 10|$;

б) $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 9|$.

Решение. а) Графиком функции $y = f(x)$ является ломаная, состоящая из одиннадцати звеньев со «стыковыми» точками $1, 2, 3, \dots, 10$. Пять звеньев этой ломаной имеют положительный угловой коэффициент (звенья, располагающиеся правее точки $x = 6$), значит, функция $y = f(x)$ возрастает на луче $[6; +\infty)$. Пять звеньев ломаной имеют отрицательный угловой коэффициент (звенья, располагающиеся левее точки $x = 5$), значит, функция убывает на луче $(-\infty; 5]$. Если же $5 < x < 6$, то $f(x) = (x - 1) + (x - 2) + \dots + (x - 5) + (6 - x) + (7 - x) + (8 - x) + (9 - x) + (10 - x) = 25$.

Итак, на луче $(-\infty; 5]$ функция убывает, на отрезке $[5; 6]$ она постоянна, причем $f(x) = 25$, на луче $[6; +\infty)$ функция возрастает. Значит, $y_{\min} = 25$.

б) Графиком функции $y = f(x)$ является ломаная, состоящая из 10 звеньев со «стыковыми» точками $1, 2, 3, \dots, 9$. Пять звеньев этой ломаной имеют положительный угловой коэффициент (звенья, располагающиеся правее точки $x = 5$), пять звеньев — отрицательный угловой коэффициент (звенья, располагающиеся левее точки $x = 5$). Значит, функция $y = f(x)$ убывает на луче $(-\infty; 5]$ и возрастает на луче $[5; +\infty)$, а потому $y_{\min} = y(5) = 20$.

§ 30. Уравнения и неравенства со знаком радикала

30.11. г) Решить уравнение с параметром a :

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x + a}.$$

Решение. $4 - x^2 = 4x + a$; $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{8 - a}$. Если $a > 8$, действительных корней нет. Если $a \leq 8$, то $x_1 = -2 + \sqrt{8 - a}$, $x_2 = -2 - \sqrt{8 - a}$; эти значения могут быть корнями уравнения. Осторожная формулировка связана с тем, что при возведении в квадрат могли появиться посторонние корни — в данном случае только за счет расширения ОДЗ. Условие для проверки выражается неравенством $4x + a \geq 0$.

Для x_1 получаем: $4(-2 + \sqrt{8 - a}) + a \geq 0$; $4\sqrt{8 - a} > 8 - a$. Обе части этого неравенства при $a \leq 8$ неотрицательны, значит, возведение в квадрат — равносильное преобразование неравенства: $16(8 - a) \geq (8 - a)^2$; $-8 \leq a \leq 8$. Итак, $x_1 = -2 + \sqrt{8 - a}$ является корнем уравнения, если $-8 \leq a \leq 8$.

Для x_2 получаем:

$$4(-2 - \sqrt{8 - a}) + a \geq 0; \quad 4\sqrt{8 - a} + 8 - a \leq 0.$$

Это верно лишь при $a = 8$. Но в этом случае $x_1 = x_2$, значит, этот случай не добавляет нам новой информации.

Ответ: $x = -2 + \sqrt{8 - a}$, если $-8 \leq a \leq 8$; если $|a| > 8$, то корней нет.

30.15. г) Решить уравнение $\sqrt{\sin x + \sin 3x} = -\cos x$.

Решение. Уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \cos x \leq 0, \\ \sin x + \sin 3x = \cos^2 x. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$2 \sin 2x \cos x = \cos^2 x; \quad \cos^2 x (4 \sin x - 1) = 0;$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{1}{4}.$$

Получаем три серии возможных решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi; \quad x = \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi; \quad x = \pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi.$$

Неравенству $\cos x \leq 0$ удовлетворяют первая и третья серии, они и составляют решение данного уравнения.

30.24. 6) Решить уравнение $\sqrt{5 + 12 \cdot 3^x - 9^x} = 3^x - 7$.

Решение. Пусть $t = 3^x$, тогда последовательно получаем:

$$\sqrt{5 + 12t - t^2} = t - 7; \quad |5 + 12t - t^2| = (t - 7)^2;$$

$$(t^2 - 12t - 5)^2 = (t^2 - 14t + 49)^2; \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 11, \quad t_3 = 27.$$

Для проверки можно воспользоваться неравенством $t - 7 > 0$. Замечаем, что $t_1 = 2$ этому неравенству не удовлетворяет, это — посторонний корень.

Итак, либо $3^x = 11$, т. е. $x = \log_3 11$, либо $3^x = 27$, т. е. $x = 3$.

30.25. а) Решить уравнение

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = x - 1.$$

Решение. Введя новую переменную $t = \sqrt{x - 1}$, получим:

$$\sqrt{t^2 + 1 + 2t} + \sqrt{t^2 + 1 - 2t} = t^2;$$

$$|t + 1| + |t - 1| = t^2;$$

$$|t - 1| = t^2 - t - 1$$

(мы учли, что по смыслу введенной замены $t \geq 0$, а потому $|t + 1| = t + 1$). Далее получаем совокупность двух смешанных систем:

$$\begin{cases} t > 1, \\ t - 1 = t^2 - t - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < t < 1, \\ 1 - t = t^2 - t - 1. \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $t = 2$, вторая система не имеет решений.

Остается решить уравнение $\sqrt{x - 1} = 2$.

Ответ: 5.

30.29. 6) Решить уравнение

$$\sqrt{3x + 1} + 5\sqrt{x} = 20 - x + \sqrt{17 - x}.$$

Решение. ОДЗ уравнения задается неравенством $-\frac{1}{8} < x <$

< 17 . На этом отрезке функция $y = \sqrt{3x + 1} + 5\sqrt{x}$ возрастает, а функция $y = 20 - x + \sqrt{17 - x}$ убывает, значит, уравнение имеет не более одного корня. Заметив, что $x = 8$ удовлетворяет заданному уравнению, делаем вывод: $x = 8$ — единственный корень уравнения.

Аналогично решаются № 30.28, 30.32.

30.30. 6) Решить уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} + \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x + 1.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное выражению, содержащемуся в его левой части, т. е. на разность соответствующих квадратных корней. Получим:

$$\begin{aligned} & (x^3 - 4x^2 + x + 15) - (x^3 - 4x^2 - x + 13) = \\ & = (x + 1)(\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} - \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13}); \end{aligned}$$

$$2(x + 1) = (x + 1)(\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} - \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13}).$$

Значит, либо $x_1 = -1$, либо

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} - \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = 2.$$

Далее последовательно получаем:

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} = 2 + \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13};$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 15 = 4 + 4\sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} + x^3 - 4x^2 - x + 13;$$

$$2\sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x - 1;$$

$$4x^3 - 17x^2 - 2x + 51 = 0.$$

Полученное уравнение имеет целочисленный корень $x_2 = 3$.
Далее имеем:

$$(x - 3)(4x^2 - 5x - 17) = 0;$$

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{297}}{8}.$$

Итак, мы нашли четыре корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{297}}{8}$.

Осталось выполнить проверку, поскольку в процессе решения уравнения был сделан целый ряд неравносильных преобразований: умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение, возведение в квадрат (дважды), расширение области определения уравнения. Первые два значения можно проверить непосредственной подстановкой в исходное уравнение. Эта проверка показывает, что $x = -1$ — посторонний корень, а $x = 3$ — корень уравнения.

Далее с помощью промежуточного уравнения

$$2\sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = x - 1$$

устанавливаем, что должно выполняться неравенство $x - 1 > 0$.

Значение $x = \frac{5 - \sqrt{297}}{8}$ неравенству не удовлетворяет, это посторонний корень.

Осталось проверить значение $x = \frac{5 + \sqrt{297}}{8}$. Для этого проанализируем последовательные этапы решения уравнения. При умножении обеих частей уравнения на сопряженное выражение могли появиться посторонние корни, а именно те значения, при которых сопряженное выражение обращается в нуль:

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 15} - \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} = 0.$$

Это имеет место только при $x = -1$. Далее дважды мы возводили в квадрат обе части уравнения. В первый раз обе части возводимого в квадрат уравнения явно неотрицательны, во второй раз — неотрицательны при условии $x - 1 \geq 0$. Проверяемое значение

$x = \frac{5 + \sqrt{297}}{8}$ прошло испытание умножением на сопряженное выражение и возведением в квадрат. Осталась последняя неприятность — расширение ОДЗ, которая для исходного уравнения

задается системой неравенств
$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + x + 15 > 0, \\ x^3 - 4x^2 - x + 13 > 0. \end{cases}$$
 Удовлет-

воряет ли число $x = \frac{5 + \sqrt{297}}{8}$ этой системе неравенств?

Заметим прежде всего, что если это число удовлетворяет второму неравенству системы, т. е. неравенству $(x^3 - 4x^2 + 13) - x > 0$, то оно тем более удовлетворяет первому неравенству системы, т. е. неравенству $(x^3 - 4x^2 + 13) + x + 2 > 0$. Значит, нам достаточно разобраться со вторым неравенством системы.

Рассмотрим промежуточное уравнение-следствие

$$2\sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 13} \quad x - 1.$$

Расширение ОДЗ произошло после возведения в квадрат обеих частей этого уравнения. В результате этой операции мы полу-

чаем уравнение $x^3 - 4x^2 - x + 13 \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ Но $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 > 0$,

значит, и $x^3 - 4x^2 - x + 13 > 0$. Этому неравенству удовлетворяют все корни последнего уравнения, в частности, проверяемый ко-

рень $x = \frac{5 + \sqrt{297}}{8}$.

Ответ: $x = 3$, $x = \frac{5 + \sqrt{297}}{8}$.

30.31. Решить уравнение:

а) $4(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = x$;

б) $x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = 3$.

Решение. а) Умножив обе части уравнения на $\sqrt{1+x} + 1$, получим:

$$4x(\sqrt{1-x} + 1) = x(\sqrt{1+x} + 1);$$

$$x(4\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + 3) = 0.$$

Значит, либо $x=0$, либо $\sqrt{1+x} = 4\sqrt{1-x} + 3$. Второе уравнение не имеет корней, поскольку в его ОДЗ, т. е. на отрезке $[-1; 1]$, левая часть уравнения явно меньше правой.

Проверка показывает, что $x=0$ — корень исходного уравнения.

б) Преобразуем уравнение к виду $(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1) = 3$.

Умножив обе его части на $(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$, получим: $2(\sqrt{x} + 1) = 3(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$. Решив это стандартное иррациональное уравнение, получим: $x = \frac{1}{4}$. Проверка показывает, что это корень исходного уравнения.

30.44. Решить неравенство с параметром a :

в) $\sqrt{5a-2x+1} < \sqrt{6x-a-7}$;

г) $\sqrt{4-x^2} < \sqrt{4x+a}$.

Решение. в) Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5a - 2x + 1 \geq 0, \\ 5a - 2x + 1 < 6x - a - 7, \end{cases} \text{ т. е. системе } \begin{cases} x < \frac{5a+1}{2}, \\ x > \frac{3a+4}{4}. \end{cases}$$

Дальнейшие рассуждения зависят от соотношения между числами $\frac{5a+1}{2}$ и $\frac{3a+4}{4}$.

Если $\frac{3a+4}{4} < \frac{5a+1}{2}$, т. е. $a > \frac{2}{7}$, то система имеет реше-

ние $\frac{3a+4}{4} < x < \frac{5a+1}{2}$. Если же $\frac{3a+4}{4} > \frac{5a+1}{2}$, т. е. $a < \frac{2}{7}$, то система не имеет решений.

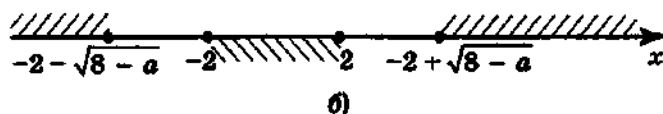
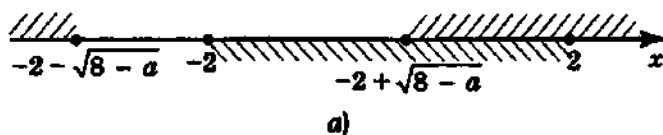


Рис. 82

г) Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0, \\ 4 - x^2 < 4x + a, \end{cases} \text{ т. е. системе } \begin{cases} -2 < x < 2, \\ x^2 + 4x + (a - 4) > 0. \end{cases}$$

Дискриминант D квадратного трехчлена $x^2 + 4x + (a - 4)$ равен $4(8 - a)$. Если $a > 8$, то $D < 0$ и квадратный трехчлен неотрицателен при всех x . В этом случае решение системы совпадает с решением ее первого неравенства. Итак, если $a > 8$, то $-2 < x < 2$.

Пусть $a < 8$, тогда квадратное неравенство системы имеет следующие решения: $x < -2 - \sqrt{8 - a}$; $x > -2 + \sqrt{8 - a}$. Дальнейшие рассуждения зависят от взаимного расположения на числовой прямой чисел -2 , 2 , $-2 - \sqrt{8 - a}$, $-2 + \sqrt{8 - a}$. Ясно, что наименьшим из них является число $-2 - \sqrt{8 - a}$. Ясно также, что $-2 + \sqrt{8 - a} > -2$. Значит, рассмотреть надо два случая: $-2 + \sqrt{8 - a} < 2$ и $-2 + \sqrt{8 - a} > 2$. В первом случае система, а с ней и заданное неравенство имеет решение $-2 + \sqrt{8 - a} < x < 2$ (рис. 82, а), а во втором — система не имеет решений (рис. 82, б). Первый случай имеет место при $-8 < a < 8$, а второй — при $a < -8$.

Ответ: в) если $a > \frac{2}{7}$, то $\frac{3a + 4}{4} < x < \frac{5a + 1}{2}$; если $a < \frac{2}{7}$, то решений нет;

г) если $a > 8$, то $-2 < x < 2$, если $-8 < a < 8$, то $-2 + \sqrt{8 - a} < x < 2$; если $a < -8$, то решений нет.

30.50. Решить неравенство:

б) $2\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x - 3} > 0$;

в) $2\sqrt{2x - 7} - \sqrt{x - 4} \geq 2\sqrt{x - 3}$.

Решение. 6) Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 3, \\ 2\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-3}. \end{cases}$$

Упростим второе неравенство этой системы:

$$4x + 4 > (x - 1) + 4(x - 3) + 4\sqrt{x^2 - 4x + 3};$$

$$4\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 17 - x.$$

Из этого неравенства следует, что $17 - x > 0$, т. е. $x < 17$. При этом условии обе части неравенства можно возвести в квадрат. После понятных упрощений придем к тому, что заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3 < x < 17, \\ 15x^2 - 30x - 241 < 0. \end{cases}$$

Второе неравенство последней системы имеет своим решением интервал $1 - \frac{16\sqrt{15}}{15} < x < 1 + \frac{16\sqrt{15}}{15}$. Значит, решение системы, а вместе с тем и решение заданного неравенства — полуинтервал

$$3 < x < 1 + \frac{16\sqrt{15}}{15}.$$

в) Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x > 4, \\ 2\sqrt{2x-7} > 2\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4}. \end{cases}$$

Упростим второе неравенство этой системы:

$$4(2x - 7) > 4(x - 3) + (x - 4) + 4\sqrt{(x - 3)(x - 4)};$$

$$4\sqrt{(x - 3)(x - 4)} < 3x - 12;$$

$$16(x - 3)(x - 4) < 9(x - 4)^2;$$

$$(x - 4)(7x - 12) < 0;$$

$$\frac{12}{7} < x < 4.$$

Значит, система, а с ней и заданное неравенство имеют такое решение: $x = 4$.

30.53. 6) Решить неравенство $\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{x+7} > 3$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{2x-1} > 3 - \sqrt[3]{x+7}.$$

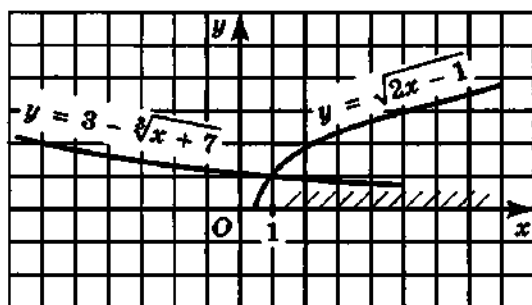


Рис. 83

Функция $y = \sqrt{2x-1}$ возрастает на луче $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, а функция $y = 3 - \sqrt[3]{x+7}$ убывает на всей числовой прямой и, в частности, на указанном луче. Графики функций пересекаются в единственной точке (1; 1), значит, решение неравенства имеет вид $x \geq 1$ (рис. 83).

Аналогично решаются № 30.58, 30.59.

30.54. а) Решить неравенство $x\sqrt{\frac{x+1}{x}} + (x+1)\sqrt{\frac{x}{x+1}} < 2\sqrt{2}$.

Решение. Неравенство $\frac{x+1}{x} > 0$, которым задается ОДЗ исходного неравенства, выполняется либо при $x < -1$, либо при $x > 0$. Очевидно, что заданное неравенство выполняется при $x < -1$. Если же $x > 0$, то заданное неравенство можно преобразовать к виду $2\sqrt{x(x+1)} < 2\sqrt{2}$. Решением системы неравенств $\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x(x+1)} < \sqrt{2} \end{cases}$ служит полуинтервал $0 < x < 1$.

Ответ: $x < -1$; $0 < x < 1$.

30.55. Решить неравенство:

а) $\sin x \sqrt{\cos x} + \cos x \sqrt{\sin x} \leq 0$;

б) $(\sin x + \cos x) \sqrt{\cos x} + \cos x \sqrt{(\sin x + \cos x)} \geq 0$.

Решение. а) ОДЗ неравенства задается условиями: $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$. При этих условиях левая часть заданного неравенства неотрицательна, поэтому решение надо искать «на стыке» — когда левая часть неравенства обращается в нуль. Это происходит в двух случаях: когда $\sin x = 0$, либо когда $\cos x = 0$.

$$6) \text{ ОДЗ неравенства задается системой } \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x + \cos x > 0. \end{cases}$$

Решение заданного неравенства совпадает с решением этой системы, которая, в свою очередь, сводится к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x > 0, \\ \operatorname{tg} x > -1. \end{cases}$$

Из первой системы получаем: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; из второй системы

получаем: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi n}{2}$; б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

30.56. 6) Решить неравенство $\sqrt{5 + 12 \cdot 5^x - 25^x} > 5^x - 7$.

Решение. Введем новую переменную $y = 5^x$ (сразу заметим, что $y > 0$). Неравенство $\sqrt{5 + 12y - y^2} > y - 7$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < y < 7, \\ 5 + 12y - y^2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 7, \\ 5 + 12y - y^2 > (y - 7)^2. \end{cases}$$

Из первой системы получаем: $0 < y < 7$, из второй: $7 \leq y < 11$. Итак, $0 < y < 11$, т. е. $0 < 5^x < 11$, откуда находим: $x < \log_5 11$.

30.57. Решить неравенство:

$$\text{а) } \sqrt{\cos x} > \sin x; \quad \text{б) } \sqrt{0,5 + \sin x + \cos x} < \cos x.$$

Решение. а) Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x > \sin^2 x. \end{cases}$$

Из первой системы получаем: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n$, из вто-

рой: $2\pi n < x < \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$. В итоге получаем:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n.$$

б) Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ 0,5 + \sin x + \cos x > 0, \\ 0,5 + \sin x + \cos x < \cos^2 x. \end{cases}$$

Поработаем с последним неравенством системы:

$$1 + 2(\sin x + \cos x) < 1 + \cos 2x;$$

$$2(\sin x + \cos x) < (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x);$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x > 0, & \begin{cases} \sin x + \cos x < 0, \\ 2 < \cos x - \sin x; \end{cases} \\ 2 < \cos x - \sin x; & \begin{cases} \sin x + \cos x < 0, \\ 2 > \cos x - \sin x. \end{cases} \end{cases}$$

Второе неравенство первой системы не имеет решений, а второе неравенство второй системы выполняется при всех x . Значит, первая система не имеет решений, а решение второй системы совпадает с решением ее первого неравенства. В итоге получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x + \cos x < 0, \\ \sin x + \cos x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Нетрудно разобраться с первыми двумя неравенствами системы:

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \operatorname{tg} x < -1; \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad (\text{рис. 84}).$$

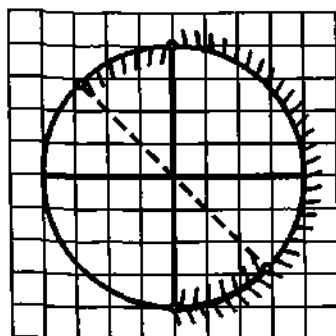


Рис. 84

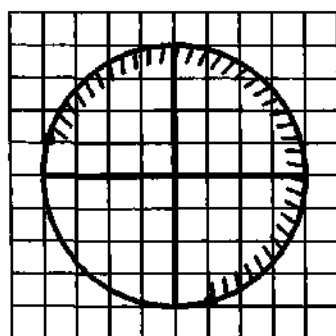


Рис. 85

Поработаем с третьим неравенством:

$$\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) > -\frac{1}{2};$$

$$-\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) + 2\pi n;$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n$$

(мы воспользовались тем, что $\arccos(-t) = \pi - \arccos t$). Полученное решение изображено на рисунке 85. Сопоставив его с предыдущим рисунком, получим решение заданного неравенства:

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

30.60. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} + \frac{2}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{7}} > \frac{10+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{x}.$$

Решение. Во всех дробях в левой части неравенства освободимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{x} + \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3x+7}+\sqrt{7}}{x} > \frac{10+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{x};$$

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+7}}{x} > \frac{9}{x}.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} > 9 - \sqrt{3x+7}; \\ x < 0, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} < 9 - \sqrt{3x+7}. \end{cases}$$

При $x > 0$ функция $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3}$ возрастает, а функция $y = 9 - \sqrt{3x+7}$ убывает. Графики этих функций пересекаются в точке $x = 3$. Значит, неравенство

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} > 9 - \sqrt{3x+7}$$

выполняется при $x > 3$ — это решение первой системы.

Рассмотрим вторую систему. На полуинтервале $[-1; 0)$ функция $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3}$ возрастает, а функции $y = 9 - \sqrt{3x+7}$

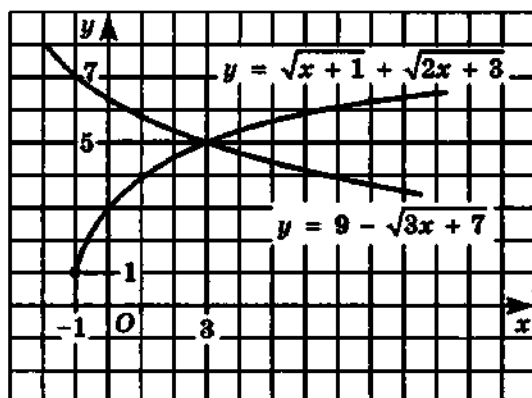


Рис. 86

убывает. Графики этих функций пересекаются в точке $x = 3$. Значит, неравенство $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} < 9 - \sqrt{3x+7}$ выполняется на всем указанном полуинтервале (рис. 86).

Ответ: $-1 < x < 0$; $x > 3$.

30.61. 6) Решить неравенство с параметром a :

$$\sqrt{x+2} \geq x+2a.$$

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x+2a < 0, \\ x+2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2a \geq 0, \\ x+2 \geq x^2+4ax+4a^2. \end{cases}$$

Решим первую систему: $\begin{cases} x < -2a, \\ x > -2. \end{cases}$ Если $a \geq 1$, то эта система

не имеет решений; если $a < 1$, то получаем: $-2 \leq x < -2a$.

Решим вторую систему. Сначала поработаем с ее вторым неравенством:

$$x^2 + (4a-1)x + (4a^2-2) < 0.$$

Запишем корни квадратного трехчлена:

$$x_1 = -2a + \frac{1 - \sqrt{9-8a}}{2}, \quad x_2 = -2a + \frac{1 + \sqrt{9-8a}}{2}.$$

Если $a > \frac{9}{8}$, то квадратное неравенство не имеет решений.

Если $a = \frac{9}{8}$, то $x = -\frac{7}{4}$; это удовлетворяет и первому неравенству

второй системы. Если $a < \frac{9}{8}$, то квадратное неравенство имеет такое решение:

$$-2a + \frac{1 - \sqrt{9 - 8a}}{2} \leq x \leq -2a + \frac{1 + \sqrt{9 - 8a}}{2}.$$

Но в рассматриваемой системе содержится еще одно неравенство: $x \geq -2a$. Точка $-2a$ располагается на числовой прямой явно левее точки x_2 , а вот по отношению к точке x_1 возможны варианты: если $a = 1$, то $x_1 = -2a$; если $1 < a < \frac{9}{8}$, то $x_1 > -2a$; если $a < 1$, то $x_1 < -2a$. Значит, в первом случае решение второй системы совокупности имеет вид $-2a \leq x \leq x_2$, во втором случае — вид $x_1 \leq x \leq x_2$, в третьем случае — вид $-2a \leq x \leq x_2$. Учтя полученное выше решение первой системы, можно записать окончательный ответ.

Ответ: если $a < 1$, то $-2 \leq x \leq -2a + \frac{1 + \sqrt{9 - 8a}}{2}$; если $1 < a < \frac{9}{8}$, то $-2a + \frac{1 - \sqrt{9 - 8a}}{2} \leq x \leq -2a + \frac{1 + \sqrt{9 - 8a}}{2}$; если $a = \frac{9}{8}$, то $x = -\frac{7}{4}$; если $a > \frac{9}{8}$, то решений нет.

30.62. 6) Решить неравенство $\sqrt{x+2} > \frac{4-x}{x-1}$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \frac{4-x}{x-1} < 0, \\ x+2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4-x}{x-1} \geq 0, \\ x+2 > \frac{(4-x)^2}{(x-1)^2}. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим: $-2 \leq x < 1$, $x > 4$. Упростив вторую систему, получим:

$$\begin{cases} 1 < x < 4, \\ (x-1)^2(x+2) > (4-x)^2. \end{cases}$$

Поработаем со вторым неравенством:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 5x - 14 &> 0; \\ (x-2)(x^2 + x + 7) &> 0; \\ x &> 2. \end{aligned}$$

Значит, решение второй системы таково: $2 < x < 4$.

Ответ: $-2 \leq x < 1$, $x > 2$.

§ 31. Доказательство неравенств

31.8. а) Сравнить числа $a = 3^{360}$ и $b = 5^{246}$.

Решение. $a = 3^{360} = (3^3)^{120} = 27^{120}$; $b = 5^{246} = (5^2)^{123} = 25^{123}$.
Значит, $a > b$.

31.5. Сравнить числа:

а) $a = \sin(\cos 1)$, $b = \cos(\cos 1)$;

б) $a = \cos(\sin 1)$, $b = \cos(\cos 1)$.

Решение. а) Воспользовавшись тем, что $1 > \frac{\pi}{4}$, и тем, что в первой четверти синус возрастает, а косинус убывает, получим следующие оценки:

$$\cos 1 < \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1,42}{2} \approx 0,71 < \frac{\pi}{4};$$

$$a = \sin(\cos 1) < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \cos(\cos 1) > \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак, $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $a < b$.

б) Рассуждая как в пункте а), получаем:

$$\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} \quad \cos \frac{\pi}{4} > \cos 1.$$

В силу убывания косинуса из $\sin 1 > \cos 1$ следует $\cos(\sin 1) < \cos(\cos 1)$, т. е. $a < b$.

31.11. б) Доказать неравенство

$$(a^4 + b^4)(a^4b^4 + 1)(a^{2b^6} + a^{6b^2}) \geq 8a^6b^6.$$

Решение. Воспользовавшись неравенством Коши ($a + b \geq 2\sqrt{ab}$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$), получим:

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2;$$

$$a^4b^4 + 1 \geq 2a^2b^2;$$

$$a^{2b^6} + a^{6b^2} \geq 2a^4b^4.$$

Перемножив эти три неравенства, получим то, что требовалось доказать.

31.12. Доказать неравенство

$$a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq 6a^2b^2c^2.$$

Решение. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что a, b, c — неотрицательные числа. Воспользовавшись, как в № 31.11, неравенством Коши, получим:

$$\begin{aligned}
 & a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \\
 & = a^2b^2(a^2c^2 + 1) + b^2c^2(a^2b^2 + 1) + a^2c^2(b^2c^2 + 1) > \\
 & > 2a^2b^2c + 2ab^2c^2 + 2a^2bc^2 = 2abc(a^2b + b^2c + c^2a).
 \end{aligned}$$

Снова воспользуемся неравенством Коши, но уже в обобщенном виде: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, откуда, в частности, следует, что $a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$, где a_1, a_2, a_3 — неотрицательные числа. Значит,

$$2abc(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 2abc \cdot 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 6a^2b^2c^2.$$

В итоге получаем требуемое неравенство.

31.17. Доказать неравенство:

$$a) \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n};$$

$$б) \frac{1^2}{1+1^4} + \frac{2^2}{1+2^4} + \frac{3^2}{1+3^4} + \dots + \frac{10^2}{1+10^4} < 1,9.$$

Решение. а) Требуемое неравенство следует из того, что

$$\frac{1}{1^2} = 1, \quad \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}.$$

Остается лишь сложить эти n неравенств.

$$\begin{aligned}
 б) \quad & \frac{1^2}{1+1^4} + \frac{2^2}{1+2^4} + \frac{3^2}{1+3^4} + \dots + \frac{10^2}{1+10^4} < \\
 & < \frac{1^2}{1^4} + \frac{2^2}{2^4} + \frac{3^2}{3^4} + \dots + \frac{10^2}{10^4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{10^2} < \\
 & < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \\
 & \quad + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1,9.
 \end{aligned}$$

31.18. Для любого натурального числа $n \geq 2$ доказать неравенство:

$$a) \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n;$$

$$б) \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Указание. а) Воспользоваться тем, что $\sqrt{1} = 1, \sqrt{2} > 1, \sqrt{3} > 1, \sqrt{n} > 1$.

б) Воспользоваться тем, что $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$,
 $\frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}$.

31.23. 6) Доказать неравенство $2^x > x^3$, где $x > 10$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = 2^x - x^3$, $x \in [10; +\infty)$.
 Имеем:

$$y' = 2^x \ln 2 - 3x^2,$$

$$y'' = 2^x \ln^2 2 - 6x,$$

$$y''' = 2^x \ln^3 2 - 6.$$

Заметим, что $\ln 2 > \frac{1}{2}$; в самом деле, $\frac{1}{2} \ln \sqrt{e} < \ln 2$.

Значит,

$$y''' = 2^x \ln^3 2 - 6 > 2^x \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 = 2^{x-3} - 6.$$

Выражение $2^{x-3} - 6$ положительно при $x > 10$, значит, функция $y'' = 2^x \ln^2 2 - 6x$ возрастает на луче $[10; +\infty)$. Заметим, что

$y''(10) > 0$, поскольку $y''(10) = 2^{10} \ln^2 2 - 60 > 2^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 60 =$
 $= 196$. Значит, $y'' > 0$ на всем луче $[10; +\infty)$. Тогда функция
 $y' = 2^x \ln 2 - 3x^2$ возрастает на указанном луче. Но $y'(10) > 0$,

поскольку $y'(10) = 2^{10} \ln 2 - 3 \cdot 10^2 > 2^{10} \frac{1}{2} - 300 = 212$, значит, $y' > 0$ на всем луче $[10; +\infty)$. Отсюда следует, что функция
 $y = 2^x - x^3$ возрастает на луче $[10; +\infty)$. Поскольку $y(10) > 0$, делаем вывод, что функция положительна на всем луче, в частности, в точках 10, 11, 12, ..., что и требовалось доказать.

31.24. Доказать неравенство ($n \geq 2$):

а) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$;

б) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Решение. а) Можно доказать это неравенство и без метода математической индукции. Сложив n неравенств: $1 > \frac{1}{\sqrt{n}}$,
 $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, — получим требуемое неравенство.

б) Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство справедливо: $1 < 2$. Предположим, что оно верно при $n = k$, где k — любое натуральное число:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}. \quad (1)$$

Докажем, что тогда оно выполняется и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}. \quad (2)$$

Воспользовавшись предположением, т. е. неравенством (1), получим:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Если мы теперь докажем, что $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$, то неравенство (2) будет доказано.

Предположим противное, что при некотором k выполняется неравенство $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq 2\sqrt{k+1}$. Тогда:

$$2\sqrt{k^2 + k} + 1 \geq 2k + 2;$$

$$2\sqrt{k^2 + k} \geq 2k + 1;$$

$$4k^2 + 4k \geq 4k^2 + 4k + 1;$$

$$0 \geq 1.$$

Получили противоречие, значит, сделанное предположение неверно. Неравенство (2), а с ним и требуемое неравенство доказаны.

31.27. а) Доказать неравенство $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, если $x \in (0; +\infty)$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, $x \in [0; +\infty)$. Она непрерывна на луче $[0; +\infty)$. Найдём её производную: $y' = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$. Производная положительна на промежутке $(0; +\infty)$, значит, функция возрастает на луче $[0; +\infty)$. Поскольку $y(0) = 0$, заключаем, что $y > 0$ при $x > 0$. Отсюда и следует требуемое неравенство.

§ 32. Уравнения и неравенства с двумя переменными

32.9. а) Построить график уравнения $|x| + |y| = x + y$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности четырех смешанных систем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + y = x + y; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ y < 0, \\ x - y = x + y; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \\ -x + y = x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \\ -x - y = x + y. \end{cases}$$

Первая система задает первую координатную четверть, вторая — неотрицательную полуось абсцисс, третья — неотрицательную полуось ординат, четвертая — часть прямой $y = -x$, расположенную в третьей четверти. График уравнения представлен на рисунке 87.

32.12. Дан график уравнения $f(x; y) = 0$ (рис. 88). Построить график уравнения:

а) $f(|x|; y) = 0$; б) $f(x, |y|) = 0$; в) $f(|x|; |y|) = 0$; г) $f(y; |x|) = 0$.

Решение. а) Нужно оставить без изменений часть графика, расположенную правее оси ординат, и добавить к ней ее симметричное отображение относительно оси ординат.

б) Нужно оставить без изменений часть графика, расположенную выше оси абсцисс, и добавить к ней ее симметричное отображение относительно оси абсцисс.

в) Нужно оставить без изменений часть графика, расположенную в первой четверти, добавить к ней ее симметричное отображение относительно оси ординат, а затем к полученной фигуре добавить симметричное отображение относительно оси абсцисс.

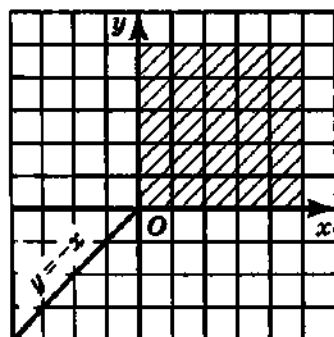


Рис. 87

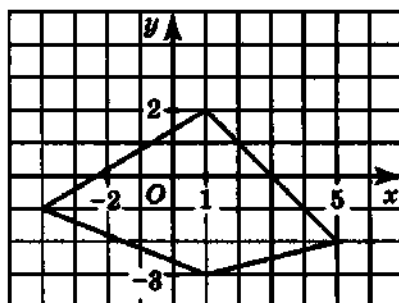


Рис. 88

г) Чтобы построить график уравнения $f(y; |x|) = 0$, нужно фигуру, изображенную на рисунке 88, подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой $y = x$, а затем рассуждать, как в пункте б).

32.18. Дан график уравнения $f(x; y) = 0$ (рис. 89). Построить график уравнения:

а) $f(x + 1; y - 1) = 0$; в) $f(2 - x; 1 + y) = 0$;

б) $f\left(|x|; -\frac{y}{2}\right) = 0$; г) $f(|y|; -2x) = 0$.

Решение. а) Нужно осуществить параллельный перенос фигуры на один единичный отрезок влево и на один единичный отрезок вверх.

б) Возьмем часть фигуры при $x > 0$, осуществим ее растяжение в 2 раза от оси x , а затем симметрию относительно той же оси. Осталось добавить к построенной фигуре ее симметричное отображение относительно оси y .

в) Здесь используем другой прием. Поскольку при преобразованиях параллельного переноса и осевой симметрии прямая переходит в прямую, достаточно разобраться с вершинами многоугольника. Как получить вершину $(1; 1)$? Для этого решим уравнения: $2 - x = 1$, $1 + y = 1$. Получим: $x = 1$, $y = 0$. Это значит, что точка $(1; 1)$ переходит в точку $(1; 0)$; используем условную запись $(1; 1) \rightarrow (1; 0)$. Рассуждая аналогично, получим: $(-3; 1) \rightarrow (5; 0)$, $(2; 3) \rightarrow (0; 2)$, $(5; 2) \rightarrow (-3; 1)$, $(1; -2) \rightarrow (1; -3)$. Новый многоугольник изображен на рисунке 90.

г) Построение осуществим в три этапа. Сначала построим график уравнения $f(y; x) = 0$, для этого нужно заданную фигуру отобразить симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 91). Затем построим график уравнения $f(y; -2x) = 0$, для этого нужно осуществить сжатие построенной на первом этапе фигуры к оси x с коэффициентом 2 и затем симметричное отображение относи-

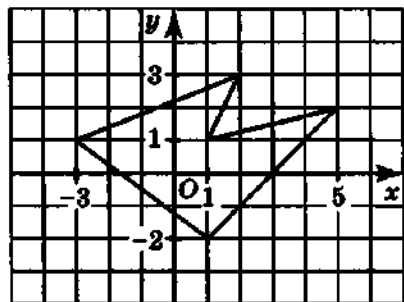


Рис. 89

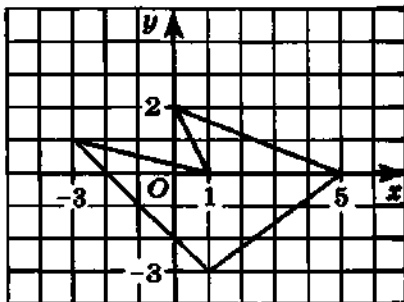


Рис. 90

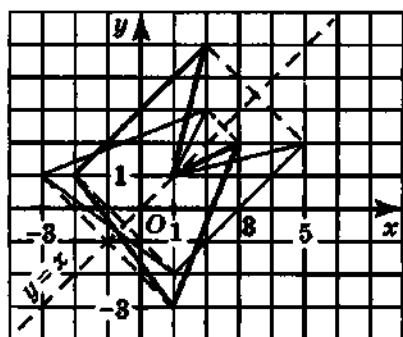


Рис. 91

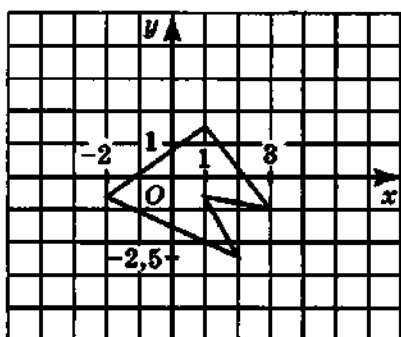


Рис. 92

тельно оси x (рис. 92). Наконец, чтобы построить график уравнения $f(|y|; -2x) = 0$, нужно оставить без изменения ту часть фигуры, изображенной на рисунке 92, которая расположена правее оси ординат, и добавить к ней ее симметричное отображение относительно оси ординат (рис. 93).

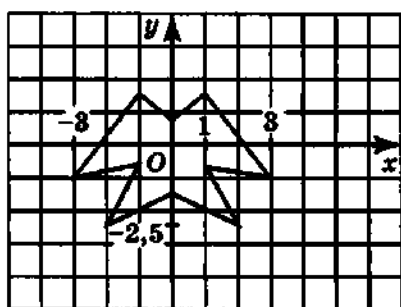
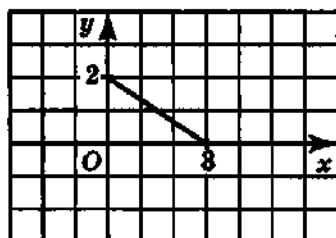


Рис. 93

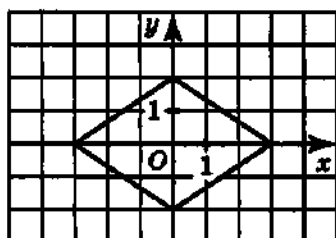
32.14. Построить график уравнения и вычислить площадь фигуры, которая ограничена этим графиком:

а) $2|x| + 3|y| = 6$; б) $\frac{1}{3}|x + 5| + \frac{1}{5}|y - 1| = 2$.

Решение. а) Если $x > 0$, $y > 0$, то получаем уравнение $2x + 3y = 6$, график изображен на рисунке 94 а. Остается отобразить полученный отрезок симметрично относительно оси y , а затем полученную ломаную — симметрично относительно оси x (рис. 94 б). Площадь полученного ромба равна 12.

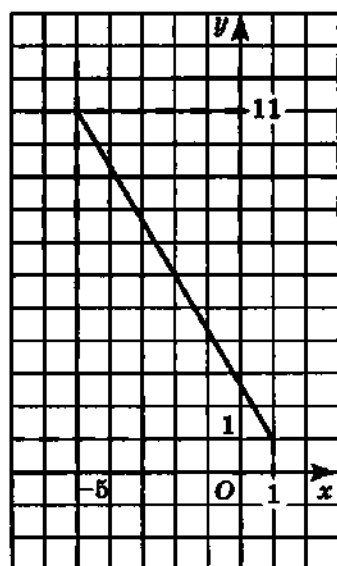


а)

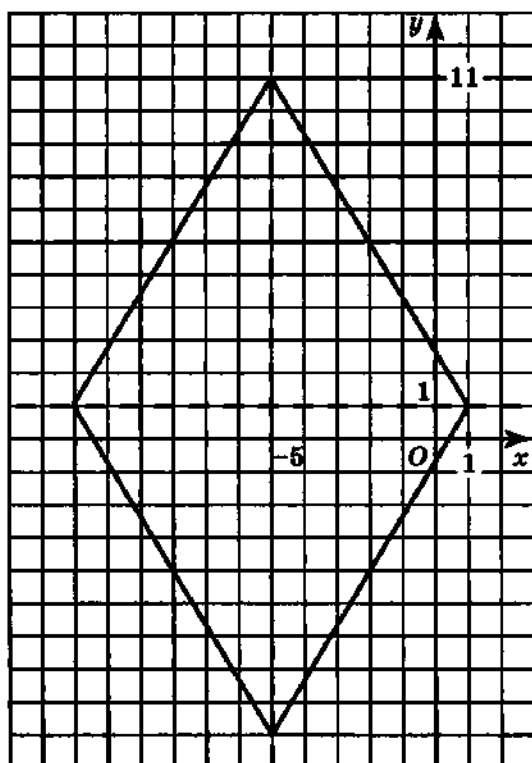


б)

Рис. 94



а)



б)

Рис. 95

б) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-5; 1)$ (пунктирные прямые на рис. 95 а). В первой четверти новой системы координат строим график уравнения $\frac{1}{3}(x + 5) + \frac{1}{5}(y - 1) = 2$, т. е. $5x + 3y = 8$, а затем рассуждаем как в пункте а), но относительно новых осей.

Фигура изображена на рисунке 95 б. Площадь полученного ромба равна 120.

32.16. б) Построить на координатной плоскости множество точек $(x; y)$ таких, что $|x - 3| + |y + 3| = 3$, и определить все значения, которые на этом множестве принимает выражение $x^2 + y^2$.

Решение. График уравнения представлен на рисунке 96 — это ромб $ABCD$. Фактически речь идет об отыскании множества $E(z)$ — области значений функции двух переменных $z = x^2 + y^2$, областью определения которой является построенное множество точек координатной плоскости. Рассмотрим эту функцию по отдельности на каждой из сторон ромба.

1) Сторона AB задается соотношениями $y = 3 - x$, $3 \leq x \leq 6$. Если $y = 3 - x$, то $z = x^2 + y^2 = x^2 + (3 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$. Вершина параболы $z = 2x^2 - 6x + 9$ находится в точке $x = 1,5$, значит, на отрезке $[3; 6]$ функция возрастает; $z(3) = 9$, $z(6) = 45$, $E(z) = [9; 45]$.

2) Сторона BC задается соотношениями $y = x - 3$, $0 \leq x \leq 3$. Если $y = x - 3$, то $z = x^2 + y^2 = x^2 + (x - 3)^2 = 2x^2 - 6x + 9$. Вершина

параболы $z = 2x^2 - 6x + 9$ находится в точке $x = 1,5$, значит, на отрезке $[0; 3]$ $z_{\min} = z(1,5) = 4,5$, $z_{\max} = z(0) = z(3) = 9$, $E(z) = [4,5; 9]$.

3) Сторона CD задается соотношениями $y = -3 - x$, $0 \leq x \leq 3$. Если $y = -3 - x$, то $z = x^2 + y^2 = x^2 + (-3 - x)^2 = 2x^2 + 6x + 9$. Вершина параболы $z = 2x^2 + 6x + 9$ находится в точке $x = -1,5$, значит, на отрезке $[0; 3]$ функция возрастает; $z(0) = 9$, $z(3) = 45$, $E(z) = [9; 45]$.

4) Сторона DA задается соотношениями $y = x - 9$, $3 \leq x \leq 6$. Если $y = x - 9$, то $z = x^2 + y^2 = x^2 + (x - 9)^2 = 2x^2 - 18x + 81$. Вершина параболы $z = 2x^2 - 18x + 81$ находится в точке $x = 4,5$, значит, на отрезке $[3; 6]$ $z_{\min} = z(4,5) = 40,5$, $z_{\max} = z(3) = z(6) = 45$, $E(z) = [40,5; 45]$.

В итоге получаем, что $E(z) = [4,5; 45]$.

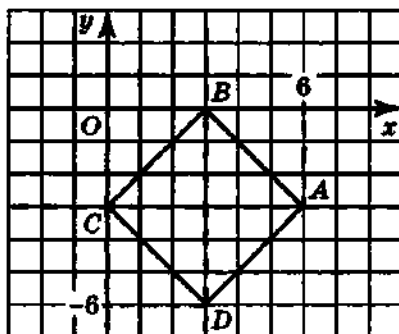


Рис. 96

32.23. Решить уравнение в целых числах:

а) $x^2 - 5xy + 6y^2 = 2$;

в) $x^2 - xy + 12y^2 = 12$;

б) $x^2 + xy - 6y^2 = 5 - 5y$;

г) $x^2 - 2xy + 8y^2 = 6 - 2x + 2y$.

Решение. а) Преобразуем уравнение к виду

$$(x - 2y)(x - 3y) = 2.$$

Так как речь идет об отыскании целочисленных решений уравнения, задача сводится к решению совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x - 2y & 1, \\ x - 3y & 2; \end{cases} \begin{cases} x - 2y & 2, \\ x - 3y & 1; \end{cases} \begin{cases} x - 2y & -1, \\ x - 3y & -2; \end{cases} \begin{cases} x - 2y & -2, \\ x - 3y & -1. \end{cases}$$

Соответственно получаем: $(-1; -1)$, $(4; 1)$, $(1; 1)$, $(-4; -1)$.

б) Решим уравнение $x^2 + xy + (5y - 6y^2 - 5) = 0$ как квадратное

относительно переменной x : $x = \frac{-y \pm \sqrt{25y^2 - 20y + 20}}{2}$. Дискри-

минант $D = 25y^2 - 20y + 20$ должен быть квадратом целого числа. Имеем: $D = (5y - 2)^2 + 16$. Запишем последовательность квадра-

тов: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, От прибавления к точному квадрату $(5y - 2)^2$ числа 16 снова должен получиться точный квадрат. Это возможно, лишь если $(5y - 2)^2 = 9$. Значит, задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 5y - 2 = 3, \\ x^2 + xy - 6y^2 = 5 - 5y; \end{cases} \quad \begin{cases} 5y - 2 = -3, \\ x^2 + xy - 6y^2 = 5 - 5y. \end{cases}$$

Первая система имеет целочисленные решения (2; 1) и (-3; 1), вторая система целочисленных решений не имеет.

в) Решим уравнение $x^2 - xy + (12y^2 - 12) = 0$ как квадратное относительно переменной x : $x = \frac{y \pm \sqrt{48 - 47y^2}}{2}$. Дискриминант

$D = 48 - 47y^2$ должен быть квадратом целого числа, это возможно, лишь если $y = \pm 1$. В итоге получаем четыре пары решений: (0; 1), (1; 1), (0; -1), (-1; -1).

г) Преобразуем уравнение к виду $(x - y)^2 + 2(x - y) + 7y^2 - 6 = 0$, введем новую переменную $t = x - y$ и решим уравнение $t^2 + 2t + 7y^2 - 6 = 0$ относительно t : $t = -1 \pm \sqrt{7 - 7y^2}$. Дискриминант $D = 7 - 7y^2$ должен быть квадратом целого числа, это возможно, лишь если $y = \pm 1$. Если $y = \pm 1$, то $t = -1$, т. е. $x - y = -1$. В итоге получаем две пары решений: (0; 1), (-2; -1).

32.37. б) Построить множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2 + y^2 - 4}{|x| + |y| - 2} \leq 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ |x| + |y| > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ |x| + |y| < 2. \end{cases}$$

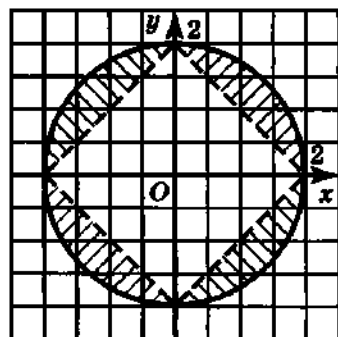


Рис. 97

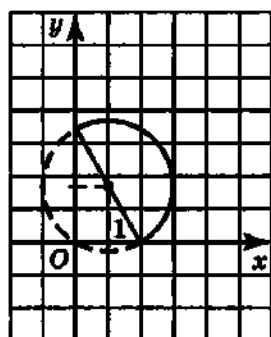
Вторая система не имеет решений, а решение первой системы изображено на рисунке 97.

32.39. а) Найти площадь фигуры, заданной неравенством

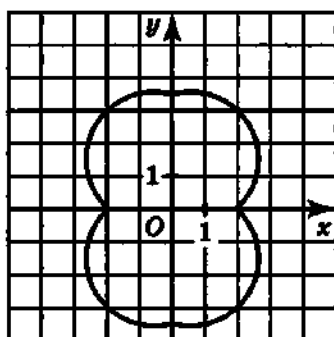
$$x^2 + y^2 < 2(|x| + |y|\sqrt{3}).$$

Решение. Если $x > 0$, $y > 0$, то получаем

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &< 2x + 2y\sqrt{3}, \\ (x - 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 &< 4. \end{aligned}$$



а)



б)

Рис. 98

Это — часть круга радиусом 2 с центром в точке $(1; \sqrt{3})$, расположенная в первой четверти координатной плоскости (рис. 98 а). Поскольку данное неравенство не меняется от замены x на $-x$ и y на $-y$, интересующая нас фигура симметрична относительно каждой из осей координат, она изображена на рисунке 98 б.

Найдем площадь S части круга, изображенного на рисунке 98 а. Эта часть состоит из полукруга радиусом 2 и прямоугольного треугольника с катетами 2 и $2\sqrt{3}$. Значит,

$$S = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2(\pi + \sqrt{3}).$$

А площадь всей фигуры равна $8(\pi + \sqrt{3})$.

32.40. Случайным образом выбирают одно из решений системы неравенств $\begin{cases} |x - y| < 2, \\ |x + y| < 2. \end{cases}$ Найти вероятность того, что выбранная точка расположена:

- а) ниже прямой $y = 1$; в) правее прямой $x = 1$;
б) выше прямой $y = 0,5$; г) выше параболы $y = x^2$.

Решение. Поработаем с заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} -2 < y - x < 2, \\ -2 < y + x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 < y < x + 2, \\ -x - 2 < y < -x + 2. \end{cases}$$

Этой системой задается квадрат с вершинами в точках $(2; 0)$, $(0; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$ (рис. 99). Площадь этого квадрата равна 8.

а) Выше прямой $y = 1$ расположен треугольник (рис. 99), площадь которого составляет $\frac{1}{8}$ площади всего квадрата. Значит, интересующая нас вероятность равна $\frac{7}{8}$.

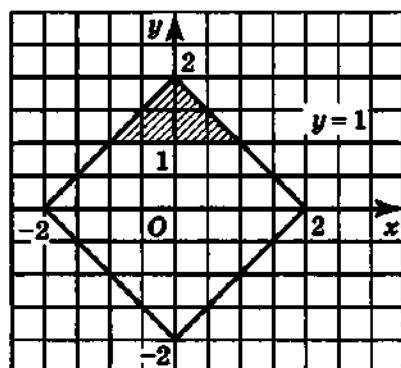


Рис. 99

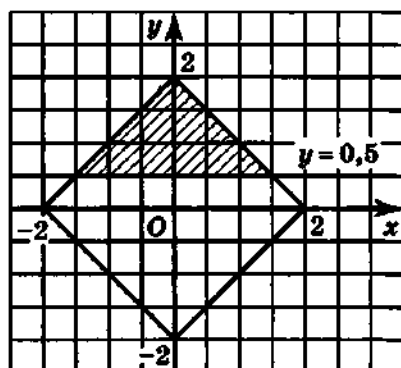


Рис. 100

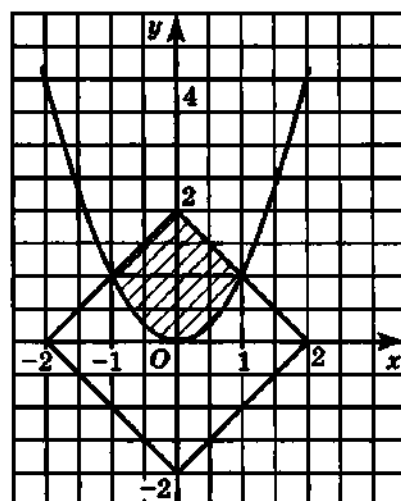


Рис. 101

б) Рассмотрим треугольник, расположенный выше прямой $y = 0,5$ (рис. 100), пусть S_1 — его площадь. Воспользуемся тем, что площади подобных треугольников относятся, как квадраты высот. Тогда $\frac{S_1}{4} = \frac{1,5^2}{2^2}$; $S_1 = \frac{9}{4}$. Искомая вероятность равна $\frac{9}{4} : 8 = \frac{9}{32}$.

в) Решение аналогично решению задачи из пункта а).

г) Найдем площадь S_2 фигуры, заштрихованной на рисунке 101:

$$S_2 = 2 \int_0^1 (2 - x - x^2) dx = \frac{7}{3}.$$

Искомая вероятность равна

$$\frac{7}{3} : 8 = \frac{7}{24}.$$

§ 33. Системы уравнений

33.20. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0, \\ y^2 - 3xy = 16. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы — однородное уравнение второй степени (общий вид однородного уравнения второй

степени $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$) и имеет тривиальное решение $(0; 0)$. Ненулевые решения можно найти с помощью почленного деления на y^2 ; получим:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0,$$

откуда находим, что либо $\frac{x}{y} = -1$, т. е. $x = -y$, либо $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, т. е. $y = 2x$. Заметим, кстати, что упомянутая выше пара $(0; 0)$ может специально не выделяться, поскольку она удовлетворяет как уравнению $x = -y$, так и уравнению $y = 2x$.

В итоге задача сводится к решению двух достаточно простых систем уравнений:

$$\begin{cases} x = -y, \\ y^2 - 3xy = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x, \\ y^2 - 3xy = 16. \end{cases}$$

Из первой системы имеем $(2; -2)$, $(-2; 2)$; вторая система не имеет решений.

33.21. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = -1, \\ 2x^2 - 3xy - 3y^2 = -4. \end{cases}$$

Решение. Это — однородная система, ее легко свести к тому виду, который встретился в № 33.20. Для этого умножим обе части первого уравнения на -4 и сложим полученное уравнение со вторым уравнением системы:

$$-4(x^2 + 3xy + y^2) + (2x^2 - 3xy - 3y^2) = 4 - 4;$$

$$-2x^2 - 15xy - 7y^2 = 0;$$

$$2x^2 + 15xy + 7y^2 = 0.$$

В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = -1, \\ 2x^2 + 15xy + 7y^2 = 0, \end{cases}$$

которая решается тем же методом, что система в № 33.20, а).

Заметим, что об однородных системах речь уже шла ранее — в § 2.

33.22. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2xy + y = -17, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18, \\ xy + x^2 + y^2 = 19. \end{cases}$$

Решение. Это — симметрические системы; так называют системы, оба уравнения которых симметричны относительно переменных, т. е. не меняют своего вида от замены x на y и y на x (о них также уже шла речь ранее — в § 2). Существует довольно простой внешний признак симметрической системы — оба ее уравнения составлены из симметрических выражений: xy , $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ и т. д. Стандартный прием решения симметрической системы заключается в следующем: вводят две новые переменные: $a = x + y$, $b = xy$. При этом учитывают, что

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b,$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = \\ &= a(a^2 - 3b). \end{aligned}$$

а) Положим $a = x + y$, $b = xy$. Получим более простую систему:

$$\begin{cases} a - 2b = -17, \\ a^2 - 2b = 25, \end{cases}$$

решениями которой служат пары (7; 12) и (-6; 5,5). Возвращаясь к переменным x и y , получаем две простые системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 5,5. \end{cases}$$

б) Положим $a = x + y$, $b = xy$. Получим более простую систему:

$$\begin{cases} a + a^2 - 2b = 18, \\ b + a^2 - 2b = 19, \end{cases}$$

решениями которой служат пары (5; 6) и (-4; -3). Возвращаясь к переменным x и y , получаем две простые системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -3. \end{cases}$$

33.29. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{3y + x} - \sqrt{6y - x} & x, \\ \sqrt{3y + x} + \sqrt{6y - x} & 3y. \end{cases}$$

Решение. Заменяя первое уравнение суммой обоих уравнений системы, а второе — разностью удвоенного второго уравнения и первого, получим:

$$\begin{cases} 3\sqrt{3y + x} = 3y + x, \\ 3\sqrt{6y - x} = 6y - x. \end{cases}$$

Введем новые переменные: $a = \sqrt{3y + x}$, $b = \sqrt{6y - x}$. Получим систему

$$\begin{cases} 3a = a^2, \\ 3b = b^2, \end{cases}$$

имеющую четыре решения: (0; 0), (0; 3), (3; 0), (3; 3). Возвращаясь к переменным x и y , получаем совокупность четырех систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3y + x = 0, \\ 6y - x = 0; \end{cases} \begin{cases} 3y + x = 0, \\ 6y - x = 9; \end{cases} \begin{cases} 3y + x = 9, \\ 6y - x = 0; \end{cases} \begin{cases} 3y + x = 9, \\ 6y - x = 9. \end{cases}$$

В итоге имеем четыре решения: (0; 0), (-3; 1), (6; 1), (3; 2).

33.37. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + \lg x = y^2 + \lg y, \\ \sqrt{x - y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

Решение. Введем в рассмотрение функцию $z = f(t)$, где $f(t) = t^2 + \lg t$. Это — возрастающая функция, следовательно, равенство $f(x) = f(y)$ возможно тогда и только тогда, когда $x = y$. Таким образом, первое уравнение данной системы можно заменить более простым уравнением $x = y$, после чего довести решение системы до конца не представляет никакой трудности.

Ответ: (4; 4).

33.40. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

Решение. Поработаем со вторым уравнением системы:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1;$$

$$\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = 1;$$

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y = 0;$$

$$\sin(x - y) = 0;$$

$$x - y = 2\pi n; \quad x - y = \pi + 2\pi n.$$

Поработаем с первым уравнением системы:

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= -\frac{1}{2}; \\ \cos(x - y) - \cos(x + y) &= -1; \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Если $x - y = 2\pi n$, то уравнение (1) примет вид

$$\cos(x + y) - 1 = 1;$$

это уравнение, а с ним и исходная система уравнений не имеют решений.

Если $x - y = \pi + 2\pi n$, то уравнение (1) примет вид

$$\cos(x + y) + 1 = 1.$$

Получаем: $\cos(x + y) = 0$;

$$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Таким образом, мы пришли к системе линейных уравнений (правда, с двумя параметрами, что вообще характерно для систем тригонометрических уравнений):

$$\begin{cases} x - y & \pi + 2\pi n, \\ x + y & \frac{\pi}{2} + \pi k. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$\begin{cases} x & \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2n + k), \\ y & -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k - 2n). \end{cases}$$

33.46. Три целых числа образуют конечную возрастающую геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 6, а первое и третье числа оставить неизменными, то получится арифметическая прогрессия. Если теперь первое и третье числа увеличить на 5, второе на 1, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти первоначальные три числа.

Решение. Обозначим искомые числа буквами a , b , c . Они образуют геометрическую прогрессию, значит, выполняется соотношение $b^2 = ac$. Числа a , $b + 6$, c образуют арифметическую прогрессию, значит, выполняется соотношение $b + 6 = \frac{a + c}{2}$.

Наконец, числа $a + 5$, $b + 7$, $c + 5$ образуют геометрическую прогрессию, значит, выполняется соотношение $(b + 7)^2 = (a + 5)(c + 5)$. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 2(b + 6) = a + c, \\ (b + 7)^2 = (a + 5)(c + 5). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем две тройки чисел: (3; 9; 27) или (27; 9; 3). Условию задачи удовлетворяет первая тройка чисел.

33.47. Три бригады, работая одновременно, выполняют норму по изготовлению подшипников за некоторое время. Если бы первые две бригады работали в 2 раза медленнее, а третья — в 4 раза быстрее, чем обычно, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют норму в 2 раза быстрее, чем вторая бригада совместно с третьей. Во сколько раз первая бригада производит подшипников за 1 ч больше, чем третья?

Решение. Первый этап. Составление математической модели.

Примем норму за 1, обозначим через x , y , z производительности труда соответственно первой, второй и третьей бригад, выраженные в долях единицы (в долях нормы). Введем еще одну переменную: t ч — время совместной работы трех бригад для выполнения нормы. Составляем уравнения в соответствии с условиями:

$$\begin{cases} t(x + y + z) = 1, \\ t\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 4z\right) = 1, \\ x + y = 2(y + z). \end{cases}$$

Второй этап. Работа с составленной моделью.

Сопоставляя первое и второе уравнения, получаем:

$$x + y + z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 4z;$$

$$x + y - 6z = 0.$$

Третье уравнение системы преобразуем к виду

$$x - y - 2z = 0.$$

Таким образом, получили систему из двух уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x + y - 6z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим: $2x - 8z = 0$, т. е. $x = 4z$.

Третий этап. Ответ на вопрос задачи. Спрашивают, во сколько раз первая бригада производит подшипников за 1 ч больше, чем третья; иными словами, во сколько раз производительность труда первой бригады больше производительности труда третьей.

Ответ фактически уже получен: $\frac{x}{z} = 4$.

Ответ: в 4 раза.

§ 34. Задачи с параметрами

34.22. а) При каких значениях параметра a решением неравенства $(x - a)^2(x - 3)(x + 1) < 0$ является сплошной промежуток?

б) При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполняется при всех x из отрезка $[1; 2]$?

Решение. а) Если $a < -1$ или $a > 3$, то решением неравенства служит объединение отрезка $[-1; 3]$ и изолированной точки a (рис. 102 а, б). Если же $-1 \leq a \leq 3$, то решением неравенства служит отрезок $[-1; 3]$, т. е. решение — сплошной промежуток (рис. 102 в).

б) Решение данного неравенство — либо интервал $(a; 2a + 1)$, либо интервал $(2a + 1; a)$. Отрезок $[1; 2]$ должен содержаться в указанном интервале. Это возможно, когда концы отрезка лежат внутри интервала, т. е. либо $\begin{cases} a < 1, \\ 2a + 1 > 2, \end{cases}$ либо $\begin{cases} a > 2, \\ 2a + 1 < 1. \end{cases}$

Вторая система не имеет решений, а из первой получаем:

$$\frac{1}{2} < a < 1.$$

Ответ. а) $-1 \leq a \leq 3$; б) $\frac{1}{2} < a < 1$.

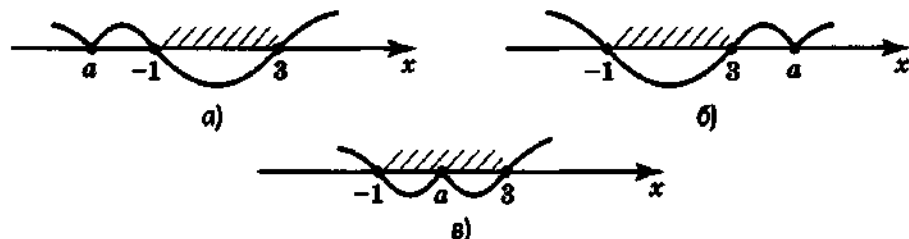


Рис. 102

34.24. Решить неравенство (относительно x):

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 < 0.$$

Решение. Если $a = 1$, то неравенство принимает вид $6x + 7 < 0$, откуда находим: $x < -\frac{7}{6}$. Если $a \neq 1$, то дискриминант D (точнее $\frac{D}{4}$) квадратного трехчлена, содержащегося в левой части неравенства, равен $5a + 4$. $D < 0$ при $a < -\frac{4}{5}$. В этом случае заданное неравенство выполняется при любых значениях x .

Пусть $a \neq 1$ и $D > 0$, т. е. $a > -\frac{4}{5}$. Тогда корни квадратного трехчлена таковы:

$$x_1 = \frac{-(2a+1) + \sqrt{5a+4}}{a-1}, \quad x_2 = \frac{-(2a+1) - \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Если $a < 1$, то $x_1 < x_2$; если $a > 1$, то $x_1 > x_2$. В первом случае решение заданного неравенства имеет вид $x < x_1$; $x > x_2$, а во втором — вид $x_2 < x < x_1$.

О т в е т: если $a = 1$, то $x < -\frac{7}{6}$; если $a < -\frac{4}{5}$, то x — любое действительное число; если $-\frac{4}{5} < a < 1$, то $x < x_1$, $x > x_2$; если $a > 1$, то $x_2 < x < x_1$. Здесь

$$x_1 = \frac{-(2a+1) + \sqrt{5a+4}}{a-1}, \quad x_2 = \frac{-(2a+1) - \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

34.29. При каких значениях a :

а) уравнение $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + a - 1 = 0$ имеет один корень;

б) уравнение $0,01^x - 2(a+1) \cdot 0,1^x + 4 = 0$ не имеет действительных корней?

Решение. а) Положим $y = 5^x$; тогда получится квадратное уравнение

$$y^2 - 3y + a - 1 = 0. \quad (1)$$

Заданное показательное уравнение может в двух случаях иметь один корень: 1) дискриминант $D = 0$ и единственный корень квадратного уравнения положителен; 2) $D > 0$, но из двух корней квадратного уравнения положителен только один.

Рассмотрим *первый случай*. Имеем $D = 9 - 4(a+1) = 13 - 4a$.

$D = 0$ при $a = \frac{13}{4}$. Тогда квадратное уравнение (1) примет вид

$$y^2 - 3y + \frac{9}{4} = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $y = \frac{3}{2}$ — это положительное число, что нас устраивает.

Рассмотрим *второй случай*. $D > 0$ при $a < \frac{13}{4}$. Квадратное уравнение (1) имеет два корня, их сумма (по теореме Виета) равна 3, их произведение $a - 1$. Если $a - 1 < 0$, то один корень квадратного уравнения положителен, а второй отрицателен; это устраивает нас. Если $a - 1 = 0$, то квадратное уравнение (1) имеет корни 0 и 3 — снова только один положительный корень, что устраивает нас. Если же $a - 1 > 0$, то квадратное уравнение (1) имеет два положительных корня, что не устраивает нас.

б) Положим $y = 0,1^x$, тогда получится квадратное уравнение

$$y^2 - 2(a + 1) + 4 = 0. \quad (2)$$

Заданное показательное уравнение в двух случаях не имеет корней: 1) дискриминант D квадратного уравнения отрицателен; 2) $D > 0$, но корни квадратного уравнения неположительны.

Рассмотрим *первый случай*. Имеем $\frac{D}{4} = (a + 1)^2 - 4$; $D < 0$ при $-3 < a < 1$.

Рассмотрим *второй случай*. $D > 0$ при $a < -3$ или при $a > 1$. Квадратное уравнение (2) имеет два корня, их сумма (по теореме Виета) равна $2(a + 1)$, их произведение 4. Следовательно, оба корня либо положительны, либо отрицательны. При $a < -3$ они отрицательны — это устраивает нас; при $a > 1$ они положительны — это не устраивает нас.

Итак, в первом случае получили $-3 < a < 1$, во втором $a < -3$; объединив эти условия, получим $a < 1$.

Ответ: а) $a = \frac{13}{4}$; $a < 1$; б) $a < 1$.

Аналогично решается № 34.30.

34.31. б) Решить уравнение

$$\sqrt{2 \sin 2x - a \cos 2x} = -\sin x,$$

если известно, что $x = -\frac{\pi}{2}$ — корень уравнения.

Решение. Подставив в уравнение вместо x значение $-\frac{\pi}{2}$, получим $\sqrt{a} = 1$, т. е. $a = 1$. Подставим найденное значение параметра в заданное уравнение и выполним соответствующие преобразования:

$$\sqrt{2 \sin 2x - \cos 2x} = \sin x;$$

$$2 \sin 2x - \cos 2x = \sin^2 x;$$

$$4 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = \sin^2 x;$$

$$\cos x (4 \sin x - \cos x) = 0;$$

$$\cos x = 0; \operatorname{tg} x = \frac{1}{4}.$$

При этом, по смыслу заданного иррационального уравнения, должно выполняться условие $\sin x \leq 0$.

Таким образом, задача сводится к решению двух смешанных систем:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{1}{4}, \\ \sin x \leq 0. \end{cases}$$

Воспользуемся числовой окружностью: $\cos x = 0$ в точках B и D (рис. 103); учитывая неравенство системы, выбираем точку D , для которой $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$.

Далее, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$ в точках M и P (см. рис. 103); учитывая неравенство системы, выбираем точку M , для которой

$$x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + 2\pi.$$

34.32. а) При каких значениях a уравнение $x(x+3)^2 + a = 0$ имеет три корня?

Решение. Построим график функции $y = x(x+3)^2$. Имеем: $y' = 1 \cdot (x+3)^2 + 2x(x+3) = (x+3)(3x+3)$; $y' = 0$ при $x = -3$ (это — точка максимума) и при $x = -1$ (это — точка минимума). Далее $y(-3) = 0$, $y(-1) = -4$.

Строим график функции с помощью двух найденных точек экстремума $(-3; 0)$ и $(-1; -4)$; учтем еще одну полезную точку графика — точку $(0; 0)$. График изображен на рисунке 104.

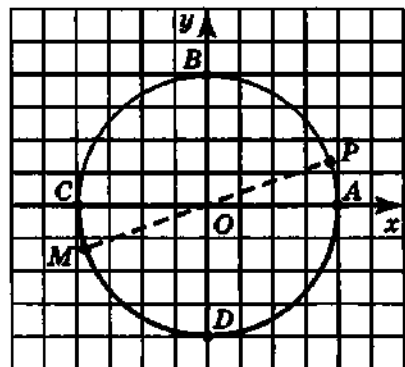


Рис. 103

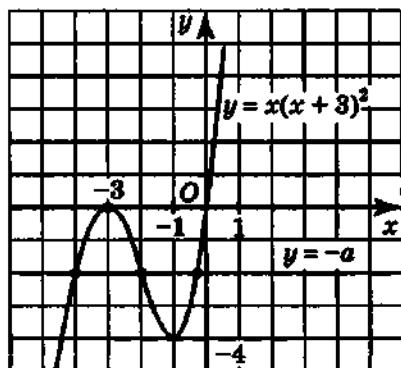


Рис. 104

Теперь нетрудно ответить на вопрос задачи: уравнение

$$x(x+3)^2 = -a$$

имеет три корня, если $-4 < -a < 0$ (см. рис. 104), т. е. если $0 < a < 4$.

34.33. При каких значениях a :

а) уравнение $x^4 - 8x^2 + 4 = a$ не имеет корней;

б) уравнение $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = a$ имеет не менее трех корней?

Решение. а) Построим график функции $y = x^4 - 8x^2 + 4$. Имеем: $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$; $y' = 0$ при $x = \pm 2$ (это — точки минимума) и при $x = 0$ (это — точка максимума). При этом $y(\pm 2) = -12$, $y(0) = 4$.

Строим график функции с помощью найденных точек экстремума; учтем также четность функции, т. е. симметрию графика относительно оси ординат. График представлен на рисунке 105.

Теперь нетрудно ответить на вопрос задачи: уравнение

$$x^4 - 8x^2 + 4 = a$$

не имеет корней, если $a < -12$ (см. рис. 105).

б) Построим график функции $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$. Имеем: $y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x+2)(x-1)$; $y' = 0$ при $x = -2$ (это — точка минимума), при $x = 0$ (это — точка максимума), при $x = 1$ (это — точка минимума). При этом $y(-2) = -32$, $y(0) = 0$, $y(1) = -5$.

Строим (схематически) график функции с помощью найденных точек экстремума (рис. 106). Графическая модель позволяет дать ответ на поставленный вопрос: уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 = a$$

имеет не менее трех корней, если $-5 < a < 0$.

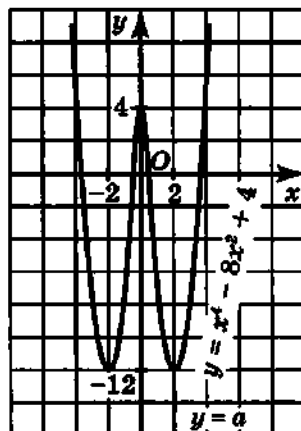


Рис. 105

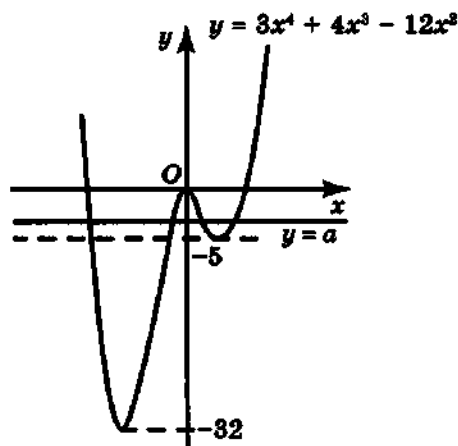


Рис. 106

З а м е ч а н и е. Задание а) можно решить элементарными методами. Введем новую переменную $t = x^2$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - 8t + 4 - a = 0$$

и переформулируем задачу: при каких значениях a это квадратное уравнение не имеет положительных корней. Тогда можно рассуждать так, как в № 34.29, б).

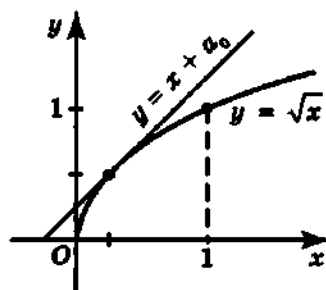


Рис. 107

34.34. Сколько корней при различных значениях a имеют уравнения:

а) $\sqrt{x} = x - a$; б) $\sqrt{4 - x^2} = x + a$?

Р е ш е н и е. а) Ответ на поставленный вопрос связан с числом точек пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x - a$. На рисунке 107 представлена графическая модель ситуации, причем особо выделена прямая $y = x + a_0$, являющаяся касательной к графику функции. Отмечаем, что заданное уравнение:

не имеет корней, если $-a > a_0$ (в этом случае прямая $y = x - a$ проходит выше касательной $y = x + a_0$);

имеет один корень, если $-a = a_0$ или если $-a < 0$;

имеет два корня, если $0 < -a < a_0$.

Таким образом, для окончательного ответа надо лишь найти значение a_0 , для чего следует составить уравнение той касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$, которая параллельна прямой $y = x$.

Имеем: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y' = 1$ при $x = \frac{1}{4}$. Составим уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = \frac{1}{4}$:

$$y = \frac{1}{2} + 1 \left(x - \frac{1}{4} \right), \text{ т. е. } y = x + \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $a_0 = \frac{1}{4}$ и теперь можно подвести окончательные итоги. Заданное уравнение:

не имеет корней, если $a < -\frac{1}{4}$;

имеет один корень, если $a = -\frac{1}{4}$ или $a > 0$;

имеет два корня, если $-\frac{1}{4} < a < 0$.

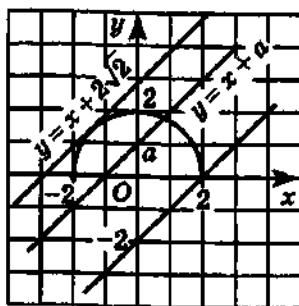


Рис. 108

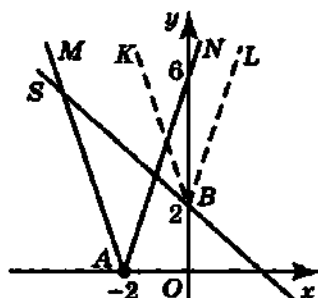


Рис. 109

б) Ответ на поставленный вопрос связан с числом точек пересечения полуокружности $y = \sqrt{4 - x^2}$ и прямой $y = x + a$. На рисунке 108 представлена графическая модель ситуации, причем особо выделена прямая $y = x + a_0$, являющаяся касательной к окружности. Легко сообразить, что $a_0 = 2\sqrt{2}$.

Отмечаем, что заданное уравнение:

не имеет корней, если $a < -2$ или $a > 2\sqrt{2}$;

имеет один корень, если $-2 \leq a < 2$ или если $a = 2\sqrt{2}$;

имеет два корня, если $2 \leq a < 2\sqrt{2}$.

34.35. При каких значениях p уравнение $|3x + 6| = px + 2$ имеет:

а) один корень; б) два корня?

Решение. а) На рисунке 109 изображен график функции $y = |3x + 6|$ — ломаная MAN , а $y = px + 2$ — это пучок прямых, проходящих через точку $(0; 2)$. Для удобства рассуждений осуществим параллельный перенос угла MAN так, чтобы его вершина попала в точку $(0; 2)$, — получим угол KBL . Заданное уравнение имеет только один корень, если прямая $y = px + 2$:

1) параллельна стороне AM — это будет при $p = -3$;

2) проходит внутри угла KBL — это будет при $p < -3$ или при $p > 3$;

3) проходит через точку A — это будет при $p = 1$.

б) Заданное уравнение имеет два корня, если прямая BS проходит через полосу, образованную параллельными прямыми AM и BK — это будет при $-3 < p < 1$.

Ответ: а) $p = 1$; $p > 3$; $p < -3$; б) $-3 < p < 1$.

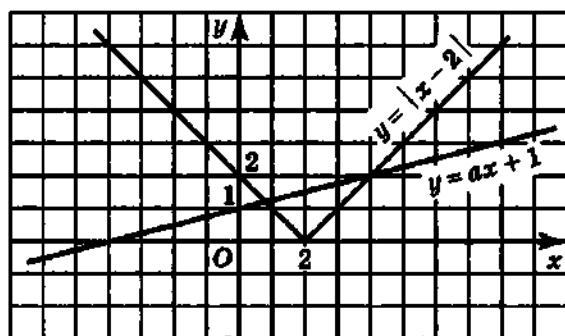


Рис. 110

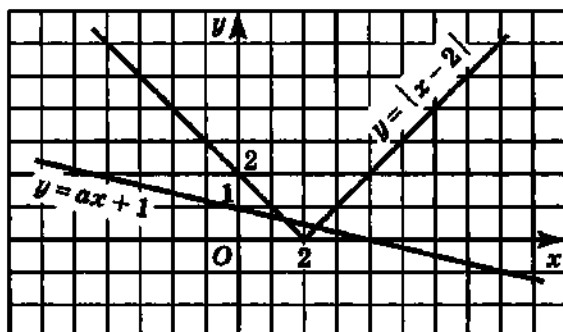


Рис. 111

34.36. а) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = |x - 2|, \\ y = ax + 1 \end{cases}$$

имеет два решения?

Решение. На рисунке 110 изображен график функции $y = |x - 2|$. Система имеет два решения, если прямая $y = ax + 1$ пересекает построенный график в двух точках. Если $a \geq 0$, то два решения будут в случае, когда прямая пересекает правое звено ломаной (левое звено она заведомо пересекает), т. е. при $a < 1$ (см. рис. 110). Если же $a < 0$, то два решения будут в случае, когда прямая пересекает ось абсцисс правее вершины ломаной (рис. 111), а это будет, когда $a > -\frac{1}{2}$. В итоге получаем: $-\frac{1}{2} < a < 1$.

34.37. При каких значениях a уравнение $|x^2 - 4x - 5| = a$ имеет:

а) два корня; б) четыре корня?

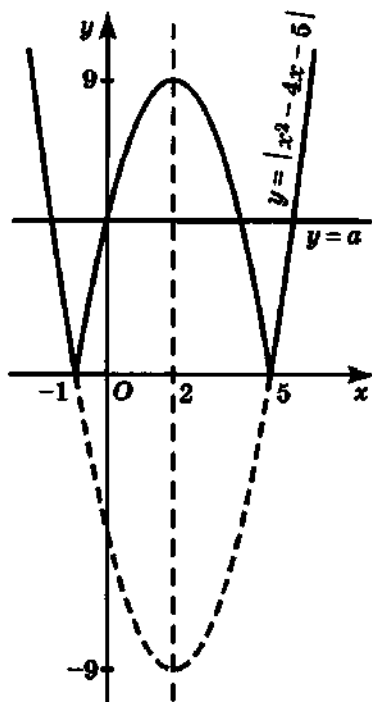


Рис. 112

Решение. На рисунке 112 представлен график функции

$$y = |x^2 - 4x - 5|.$$

Рассматривая разные положения прямой $y = a$ по отношению к построенному графику, приходим к следующему выводу. Заданное уравнение имеет: а) два корня, если $x > 9$ или $a = 0$; б) четыре корня, если $0 < a < 9$.

34.38. При каких значениях а:

а) у уравнения

$$(x - a)^2 - 12|x - a| + 35 = 0$$

число отрицательных корней равно числу положительных корней;

б) у уравнения

$$(x + a)^2 - 6|x + a| + 8 = 0$$

число положительных корней больше числа отрицательных корней.

Решение. а) Положив $t = |x - a|$, получим квадратное уравнение $t^2 - 12t + 35 = 0$ с корнями 5 и 7.

Из совокупности уравнений

$$|x - a| = 5; |x - a| = 7$$

находим 4 корня заданного уравнения: $a - 7$; $a - 5$; $a + 5$; $a + 7$. По условию два корня должны быть отрицательными и два — положительными. Это значит (рис. 113), что

$$\begin{cases} a + 5 > 0, \\ a - 5 < 0, \text{ т. е. } -5 < a < 5. \end{cases}$$

б) Положив $t = |x + a|$, получим квадратное уравнение $t^2 - 6t + 8 = 0$ с корнями 2 и 4. Из совокупности уравнений:

$$|x + a| = 2; |x + a| = 4$$

находим 4 корня заданного уравнения: $-a - 4$; $-a - 2$; $-a + 2$; $-a + 4$. По условию положительных корней должно быть больше, чем отрицательных. Это значит (рис. 114), что точка $-a - 2$

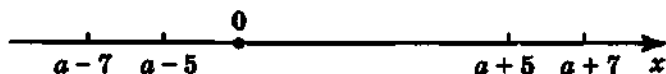


Рис. 113

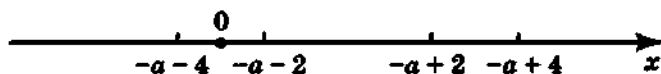


Рис. 114

должна либо совпадать с точкой 0, либо располагаться справа от нее. Таким образом, $-a - 2 \geq 0$, т. е. $a \leq -2$.

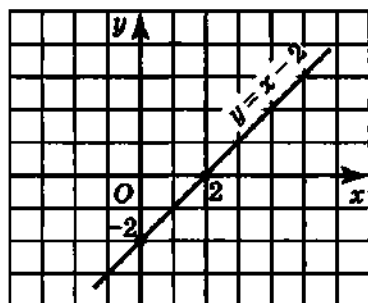
Ответ: а) $-5 < a < 5$; б) $a \leq -2$.

34.39. а) Сколько корней имеет уравнение $||x| - 2| = a$ при различных значениях параметра a ?

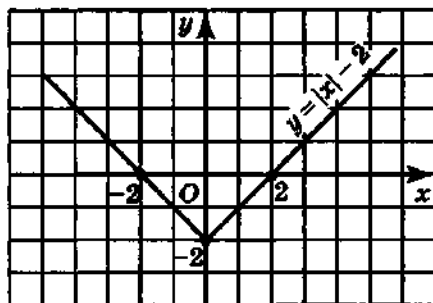
б) Решить уравнение $|x - 1| + |x - 3| = a$.

Решение. а) Построим график функции $y = ||x| - 2|$, сделаем это в три этапа: построим график функции $y = x - 2$ (рис. 115 а), затем $y = |x| - 2$ (рис. 115 б) и, наконец, $y = ||x| - 2|$ (рис. 115 в). Прямая $y = a$ не пересекает построенный график при $a < 0$, имеет с ним две точки пересечения при $a = 0$ (это точки $x_1 = 2$, $x_2 = -2$), имеет с ним четыре точки пересечения при $0 < a < 2$, три точки пересечения, если $a = 2$, и, наконец, две точки пересечения, если $a > 2$ (рис. 116).

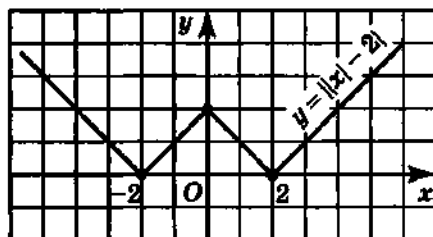
Ответ: если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, $a > 2$, то два корня; если $a = 2$, то три корня; если $0 < a < 2$, то четыре корня.



а)



б)



в)

Рис. 115

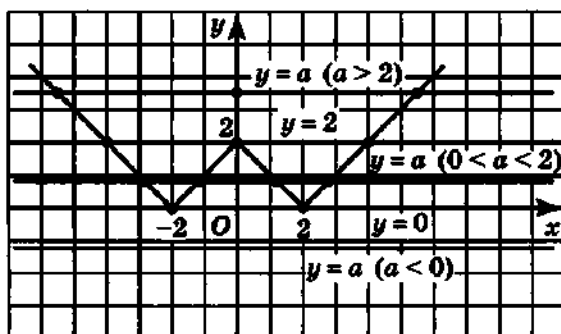


Рис. 116

б) **Первый способ.** Построим график функции $y = |x - 1| + |x - 3|$. Если $x \leq 1$, то $y = 1 - x + 3 - x = 4 - 2x$; если $1 < x \leq 3$, то $y = x - 1 + 3 - x = 2$; если $x > 3$, то $y = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$. График изображен на рисунке 117.

Дальнейшие рассуждения, как и в предыдущем примере, зависят от взаимного расположения построенного графика (ломаной) и прямой $y = a$:

если $a < 2$, то ломаная и прямая $y = a$ не пересекаются;

если $a = 2$, то ломаная и прямая $y = a$ совпадают при $1 < x \leq 3$;

если $a > 2$, то ломаная и прямая $y = a$ имеют две точки пересечения. Абсциссу одной из этих точек можно найти из уравнения

$4 - 2x = a$, получаем: $x = \frac{4 - a}{2}$. Абсциссу другой точки пересечения можно найти из уравнения

$2x - 4 = a$, получаем: $x = \frac{a + 4}{2}$.

Ответ: если $a < 2$, то корней нет; если $a = 2$, то $1 < x \leq 3$; если $a > 2$, то

$$x_1 = \frac{4 - a}{2}, \quad x_2 = \frac{a + 4}{2}.$$

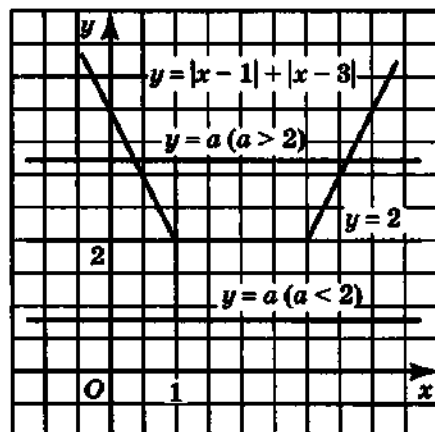


Рис. 117

Второй способ. Воспользуемся тем, что $|x - 1|$ — расстояние на координатной прямой между точками x и 1 ($|x - 1| = \rho(x; 1)$), а $|x - 3|$ — расстояние на координатной прямой между точками x и 3 ($|x - 3| = \rho(x; 3)$). За-

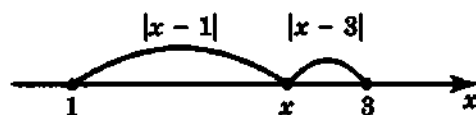


Рис. 118

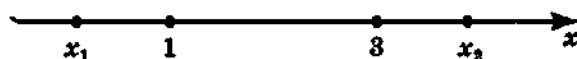


Рис. 119

данное уравнение можно переписать на «геометрическом языке»: $\rho(x; 1) + \rho(x; 3) = a$. Ясно, что, поскольку $\rho(1; 3) = 2$, при $a < 2$ уравнение $\rho(x; 1) + \rho(x; 3) = a$ не имеет корней, а при $a = 2$ корнем служит любое число из отрезка $[1; 3]$ (рис. 118).

Пусть теперь $a > 2$. Тогда на координатной прямой можно найти две точки, сумма расстояний от которых до точек 1 и 3 равна a . Одна из этих точек (x_1) лежит левее точки 1 (рис. 119) и удовлетворяет условию $(1 - x_1) + (3 - x_1) = a$; получаем: $x_1 = \frac{4 - a}{2}$. Другая из этих точек (x_2) лежит правее точки 3 (см. рис. 119) и удовлетворяет условию $(x_2 - 1) + (x_2 - 3) = a$; получаем: $x_2 = \frac{4 + a}{2}$.

34.40. При каких значениях параметра a графики функций $y = a|x + 1|$ и $y = x + a^2|x|$ пересекаются в трех точках?

Решение. Рассмотрим три случая: $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.

Если $a = 0$, то первая функция принимает вид $y = 0$, а вторая $y = x$. Графики функций $y = 0$, $y = x$ пересекаются только в одной точке, что нам не подходит по условию задачи.

I. Пусть $a > 0$. Построим графики функций $y = a|x + 1|$ и $y = x + a^2|x|$. График первой функции изображен на рисунке 120. Для второй функции нужно рассмотреть случаи $x > 0$ и $x < 0$, что позволит переписать функцию в виде

$$y = \begin{cases} (a^2 + 1)x, & \text{если } x \geq 0, \\ (1 - a^2)x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Вторая строка заставляет нас выделить случай $a = 1$ и рассмотреть случаи $0 < a < 1$, $a > 1$.

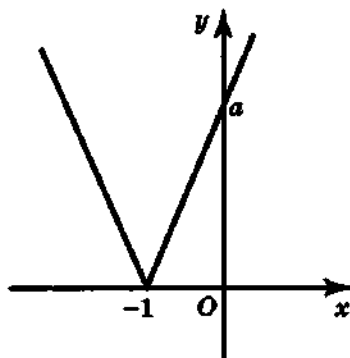


Рис. 120

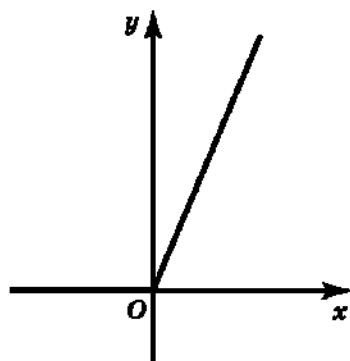


Рис. 121

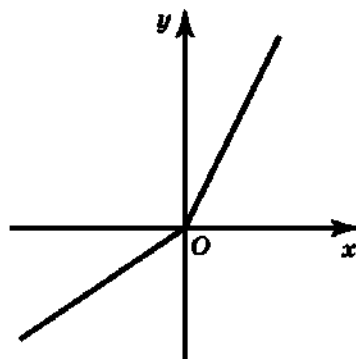


Рис. 122

Если $a = 1$, то функция принимает вид

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ее график изображен на рисунке 121. Сразу заметим, что этот график пересекается с графиком, изображенным на рисунке 120, не в трех точках (точек пересечения будет одна или две), что нас не устраивает.

Если $0 < a < 1$, то $1 - a^2 > 0$, тогда график функции выглядит так, как показано на рисунке 122. Опять замечаем, что графики, изображенные на рисунках 122 и 120, не имеют трех точек пересечения (точек пересечения либо не будет вовсе, либо будет одна), что нас не устраивает.

Если $a > 1$, то $1 - a^2 < 0$, тогда график функции

$$y = \begin{cases} (1 + a^2)x, & \text{если } x \geq 0, \\ (1 - a^2)x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

выглядит так, как показано на рисунке 123.

Графики, изображенные на рисунках 123 и 120, могут пресечься в трех точках (рис. 124), это произойдет при одновременном выполнении следующих условий.

1) $1 + a^2 > a$. Почему? Если $1 + a^2 = a$, то угловые коэффициенты прямой $y = a(x + 1)$, изображенной на рисунке 120 при $x \geq -1$, и прямой $y = (1 + a^2)x$, изображенной на рисунке 123 при $x \geq 0$, будут рав-

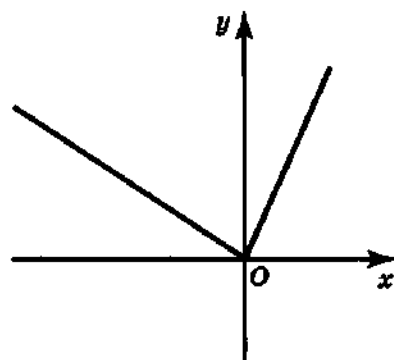


Рис. 123

ны, т. е. прямые будут параллельны. Тогда трех точек пересечения не будет (будет одна или две, которые получатся от пересечения луча $y = (1 - a^2)x$, $x < 0$, с лучами, изображенными на рисунке 120. Чтобы рассчитывать на три точки пересечения, нужно, чтобы луч $y = (1 + a^2)x$, $x > 0$, пересекся с лучом $y = a(x + 1)$, $x > -1$ (см. рис. 124), а это будет при условии, что угловой коэффициент первого луча ($k_1 = 1 + a^2$) больше углового коэффициента второго луча ($k_2 = a$). Итак, $1 + a^2 > a$.

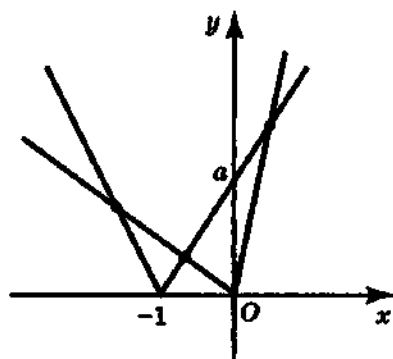


Рис. 124

2) $1 - a^2 > -a$. Почему? Нам нужно, чтобы луч $y = (1 - a^2)x$, $x < 0$, пересек график $y = a|x + 1|$ в двух точках. С лучом $y = a(x + 1)$, $x > -1$, пересечение (в одной точке) нам обеспечено (см. рис. 124), значит, все зависит от пересечения луча $y = (1 - a^2)x$, $x < 0$, с лучом $y = -a(x + 1)$, $x < -1$. Лучи пересекутся, если угловой коэффициент первого луча ($k_3 = 1 - a^2$) будет связан с угловым коэффициентом второго луча ($k_4 = -a$) неравенством $k_3 > k_4$, т. е. $1 - a^2 > -a$. В самом деле, если $k_3 = k_4$, то лучи будут параллельны (рис. 125), если $k_3 < k_4$, то лучи не параллельны, но не пересекаются (рис. 126).

Итак, три точки пересечения будут при значениях параметра a , удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a > 1, \\ 1 + a^2 > a, \\ 1 - a^2 > -a. \end{cases}$$

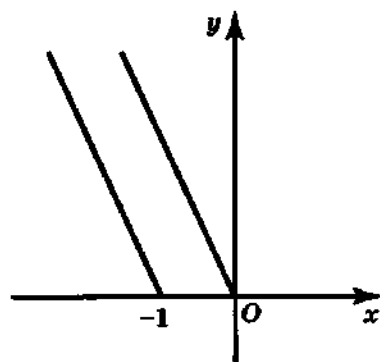


Рис. 125

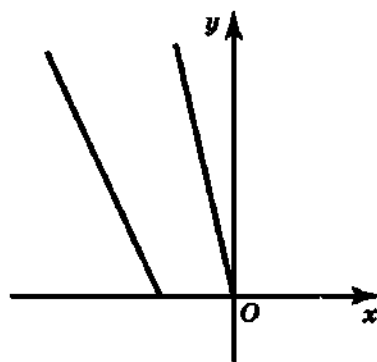


Рис. 126

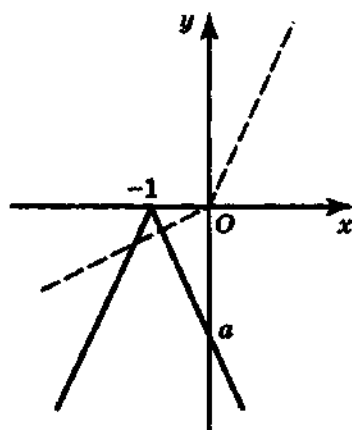


Рис. 127

Решив ее, получим:

$$1 < a < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

II. Пусть $a < 0$. Тогда график функции $y = a|x + 1|$ выглядит так, как изображено на рисунке 127. Луч $y = (1 + a^2)x$, $x \geq 0$, с этим графиком не пересекается (этот луч изображен на рис. 127 пунктиром в первом координатном угле), а луч $y = (1 - a^2)x$, $x < 0$, не сможет пересечь график функции $y = a|x + 1|$ в трех точках (точек пересечения может не быть вовсе, может быть одна, может быть две — для пунктирного луча в третьем координатном

угле на рис. 127). Все это нас не устраивает.

Ответ: $1 < a < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$

Замечание. Этот пример можно было решить, не прибегая к помощи графиков. Речь идет об уравнении

$$a|x + 1| = x + a^2|x|. \quad (1)$$

Отметив на координатной прямой две точки -1 и 0 и раскрыв модули в каждом из трех случаев: $x < -1$; $-1 \leq x < 0$; $x \geq 0$, получим соответствующий вид уравнения (1) (рис. 128). Три корня у уравнения (1) будет тогда и только тогда, когда каждое из написанных уравнений имеет корень, удовлетворяющий соответствующему условию (первое уравнение — условию $x < -1$, второе уравнение — условию $-1 \leq x < 0$, третье уравнение — условию $x \geq 0$).

Это приводит нас к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{a}{a^2 - a - 1} < -1, \\ \frac{a}{a^2 + a - 1} \geq -1, \\ -\frac{a}{a^2 + a - 1} < 0, \\ \frac{a}{a^2 - a + 1} \geq 0, \end{cases}$$

откуда получим $1 < a < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$

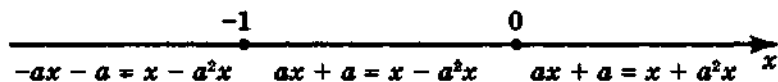


Рис. 128

34.41. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 2)x + a(a - 4) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

имеет два решения?

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы (2) в двух возможных случаях: $x \geq 0$, $x < 0$.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и уравнение примет вид

$$|x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12x = 0, \text{ т. е.}$$

$$|x^2 - 7x + 6| = -(x^2 - 7x + 6),$$

а это, по определению модуля, верно, если $x^2 - 7x + 6 \leq 0$, т. е. $1 \leq x \leq 6$. Поскольку эти значения x удовлетворяют поставленному выше условию $x \geq 0$, то отрезок $[1; 6]$ — решение первого уравнения системы (2).

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и уравнение примет вид

$$|x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 + 12x = 0, \text{ т. е.}$$

$$|x^2 - 7x + 6| + x^2 + 17x + 6 = 0.$$

Так как при $x < 0$ выполняется неравенство $x^2 - 7x + 6 > 0$, то $|x^2 - 7x + 6| = x^2 - 7x + 6$, и мы получаем:

$$x^2 - 7x + 6 + x^2 + 17x + 6 = 0, \text{ т. е. } 2x^2 + 10x + 12 = 0;$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0; x_1 = -3, x_2 = -2.$$

Оба эти корня удовлетворяют условию $x < 0$.

Между прочим, удобно (и это нам понадобится) изобразить решения первого уравнения системы (2) на координатной прямой: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $1 \leq x \leq 6$ (рис. 129 а).

Второе уравнение системы (2) имеет два корня: $x_1 = a$, $x_2 = a - 4$ (рис. 129 б).

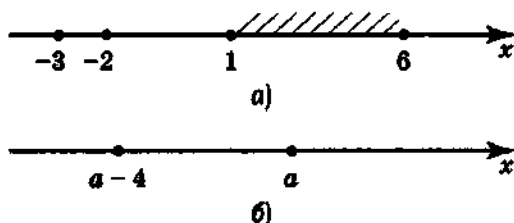


Рис. 129

Система (2) имеет два решения тогда и только тогда, когда обе точки, отмеченные на рисунке 129 б, при совмещении рисунков 129 а и 129 б одновременно совпадут с точками, отмеченными на рисунке 129 а. Чтобы понять, когда это произойдет, надо точку $x = a - 4$ двигать по координатной прямой слева направо и наблюдать за поведением точки $x = a$.

«Двойное попадание» будет при $a - 4 = -3$ (тогда $a = 1$), при $a - 4 = -2$ (тогда $a = 2$) и при $1 \leq a - 4 \leq 2$ (тогда $5 \leq a \leq 6$).

Ответ: $a = 1$, $a = 2$; $5 \leq a \leq 6$.

34.42. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|, \\ |\operatorname{tg} x| + |y| = 1 \end{cases} \quad (3)$$

имеет единственное решение?

Решение. Пусть $(x_1; y_1)$ — решение системы. Тогда и $(-x_1; y_1)$ — решение, поскольку в оба уравнения системы входят лишь четные функции от x , т. е. такие, что $f(-x) = f(x)$: это x^2 , $|\sin x|$ и $|\operatorname{tg} x|$. Значит, если $x_1 \neq 0$, то система имеет, по крайней мере, два решения. Поэтому единственное решение системы (3) имеет вид $(0; y_1)$.

Подставив значение $x = 0$ в уравнения системы (3), получим:

$$\begin{cases} a - 1 = y, \\ |y| = 1; \end{cases}$$

находим: $y_1 = 1$, $a_1 = 2$ или $y_2 = -1$, $a_2 = 0$. Таким образом, нам нужно изучить два возможных значения параметра a : $a = 2$ либо $a = 0$.

Пусть $a = 2$, тогда система (3) принимает вид

$$\begin{cases} 2x^2 + y - |\sin x| = 1, \\ |\operatorname{tg} x| + |y| = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (4) делаем вывод: $|y| \leq 1$, тогда правая часть первого уравнения системы (4) явно неположительна, а поскольку его левая часть неотрицательна, то решение первого уравнения надо искать «на стыке» его частей, т. е. первое уравнение системы (4) равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2x^2 = 0, \\ y - |\sin x| - 1 = 0, \end{cases}$$

откуда получаем $x = 0$, $y = 1$. Пара $(0; 1)$ удовлетворяет и второму уравнению системы (4).

Пусть $a = 0$, тогда система (3) принимает вид

$$\begin{cases} -1 = y - |\sin x|, \\ |\operatorname{tg} x| + |y| = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Замечаем, что системе (5) удовлетворяют любые пары вида $(\pi n; -1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, значит система (5) имеет бесконечно много решений, что нас не устраивает.

Ответ: при $a = 2$; решение системы $(0; 1)$.

34.43. При каких значениях параметра a ($a > 0$) неравенство $2x^2 - a \ln x < 0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение. Пусть $f(x) = 2x^2 - a \ln x$. Непрерывная функция $y = f(x)$ принимает в некоторых своих точках отрицательные значения (т. е. неравенство $f(x) < 0$ имеет решения), если $y_{\min} < 0$, где y_{\min} — наименьшее значение функции $y = f(x)$ в ее области определения, т. е. при $x > 0$ (если, конечно, y_{\min} существует).

Имеем: $f'(x) = (2x^2 - a \ln x)' = 4x - \frac{a}{x} = \frac{4x^2 - a}{x}$; из уравнения

$$\frac{4x^2 - a}{x} = 0 \text{ находим: } x = \frac{\sqrt{a}}{2}. \text{ Это единственная стационарная}$$

точка функции (напомним, что $x > 0$, $a > 0$). Если $0 < x < \frac{\sqrt{a}}{2}$,

то $\frac{4x^2 - a}{x} < 0$; если же $x > \frac{\sqrt{a}}{2}$, то $\frac{4x^2 - a}{x} > 0$. Значит, $y' < 0$

слева от точки $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$; $y' > 0$ справа от точки $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$.

Вывод: $\frac{\sqrt{a}}{2}$ — единственная точка минимума непрерывной функции $y = f(x)$, значит, $y_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)$.

Найдем это значение:

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2 - a \ln \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{4} = \frac{a}{2} \left(1 - \ln \frac{a}{4}\right).$$

Осталось решить неравенство $f\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right) < 0$. Имеем:

$$\frac{a}{2} \left(1 - \ln \frac{a}{4}\right) < 0; \quad 1 - \ln \frac{a}{4} < 0; \quad \ln \frac{a}{4} > 1; \quad \frac{a}{4} > e; \quad a > 4e.$$

Ответ: $a > 4e$.

34.44. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^x + 2 = a \cdot 2^x \sin \pi x$$

имеет единственный корень?

Решение. Преобразуем уравнение к виду $2^x + \frac{2}{2^x} = a \sin \pi x$ и далее

$$\sqrt{2} \left(2^{x-\frac{1}{2}} + 2^{-x+\frac{1}{2}} \right) = a \sin \pi x. \quad (6)$$

Предположим, что $x = t$ — корень уравнения (6), т. е. верно равенство

$$\sqrt{2} \left(2^{t-\frac{1}{2}} + 2^{-t+\frac{1}{2}} \right) = a \sin \pi t. \quad (7)$$

Тогда и $x = 1 - t$ — корень уравнения (6). В самом деле, подставив это значение в уравнение (6), получим:

$$\sqrt{2} \left(2^{1-t-\frac{1}{2}} + 2^{-1+t+\frac{1}{2}} \right) = a \sin \pi(1 - t), \text{ т. е.}$$

$$\sqrt{2} \left(2^{-t+\frac{1}{2}} + 2^{t-\frac{1}{2}} \right) = a \sin \pi t —$$

верное равенство (см. равенство (7)).

Таким образом, если заданное уравнение имеет единственный корень $x = t$, то должно выполняться равенство $t = 1 - t$, т. е.

$t = \frac{1}{2}$. Подставим $x = \frac{1}{2}$ в заданное уравнение:

$$2 + 2 = a\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2}; \quad a = 2\sqrt{2}.$$

Осталось убедиться, что при $a = 2\sqrt{2}$ заданное уравнение на самом деле имеет единственный корень.

Рассмотрим заданное уравнение в виде (6) и подставим $a = 2\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \left(2^{x-\frac{1}{2}} + 2^{-x+\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{2} \sin \pi x; \quad 2^{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{x-\frac{1}{2}}} = 2 \sin \pi x.$$

Так как $2^{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{x-\frac{1}{2}}} \geq 2$, а $2 \sin \pi x < 2$, то задача сводится

к системе уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{x-\frac{1}{2}}} = 2, \\ 2 \sin \pi x = 2, \end{cases}$$

откуда получаем: $x = \frac{1}{2}$ — единственное решение системы и, следовательно, единственный корень уравнения.

Ответ: $a = 2\sqrt{2}$.

34.45. Найти все положительные значения параметра a , при которых неравенство $|2x + a|x| - 13| > 1$ выполняется для всех x из отрезка $[-3; 3]$.

Решение. Заданное неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$$2x + a|x| > 14; \quad 2x + a|x| < 12.$$

Первое неравенство не выполняется при $x = 0$, значит, не может выполняться для всех x из отрезка $[-3; 3]$. Поэтому нас интересует лишь второе неравенство. Оно, в свою очередь, равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ (a + 2)x \leq 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ (2 - a)x \leq 12. \end{cases}$$

Решение первой системы находится без труда: $0 \leq x \leq \frac{12}{a + 2}$.

Вторую систему придется рассмотреть в трех случаях: $0 < a < 2$; $a = 2$; $a > 2$.

Если $0 < a < 2$, то решение системы таково: $x < 0$. Если $a = 2$, то также получаем, что $x < 0$. Если, наконец, $a > 2$, то получаем:

$$\frac{12}{2 - a} \leq x < 0.$$

Объединив найденные решения с решением первой системы совокупности, получим: если $0 < a \leq 2$, то $x \leq \frac{12}{a + 2}$; если $a > 2$, то $\frac{12}{2 - a} \leq x \leq \frac{12}{a + 2}$.

По условию задачи требуется, чтобы решение неравенства содержало внутри себя отрезок $[-3; 3]$. Рассмотрим первую часть решения: если $0 < a \leq 2$, то $x \leq \frac{12}{a + 2}$. Этому неравенству числа 3 и -3 удовлетворяют, интересующий нас отрезок целиком со-

держится в луче $\left(-\infty; \frac{12}{a+2}\right]$. Рассмотрим вторую часть решения:

если $a > 2$, то $\frac{12}{2-a} < x < \frac{12}{a+2}$. Ясно, что при $a > 2$ выполня-

ется неравенство $\frac{12}{a+2} < 3$, а потому интересующий нас отрезок не содержится в указанном решении.

Ответ: $0 < a \leq 2$.

34.46. Найти все значения параметра a , при которых области определения функции $y = (a^{x+0.5} + a^3\sqrt{x} - x^{0.5+\log_2 a} - a^{2.5})^{0.5}$ принадлежит лишь одно целое число.

Решение. Имеем:

$$a^{x+0.5} + a^3\sqrt{x} - x^{0.5+\log_2 a} - a^{2.5} = a^x\sqrt{a} + a^3\sqrt{x} - a^x\sqrt{x} - a^3\sqrt{a}$$

$$a^x(\sqrt{a} - \sqrt{x}) - a^3(\sqrt{a} - \sqrt{x}) = (a^x - a^3)(\sqrt{a} - \sqrt{x}).$$

Значит, область определения функции задается следующими условиями:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ (a^x - a^3)(\sqrt{a} - \sqrt{x}) \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим последнее неравенство этой системы в следующих случаях: $0 < a < 1$; $a = 1$; $a > 1$.

Пусть $0 < a < 1$. Выражение $(a^x - a^3)(\sqrt{a} - \sqrt{x})$ обращается в нуль в точках a и 3 , причем его знаки меняются так, как показано на рисунке 130. Значит, последнее неравенство системы выполняется при $x < a$ или при $x > 3$, а сама система имеет такое решение: $0 < x < a$; $x > 3$. Здесь содержится бесконечно много целых чисел, это нас не устраивает.

Если $a = 1$, то последнее неравенство системы выполняется для любых $x > 0$, а сама система имеет такое решение: $0 < x < 1$; $x > 1$. Это нас также не устраивает.

Пусть $a > 1$. Выражение $(a^x - a^3)(\sqrt{a} - \sqrt{x})$ обращается в нуль в точках a и 3 , причем его знаки меняются так, как показано на ри-

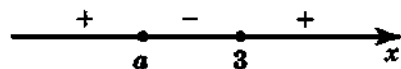


Рис. 130

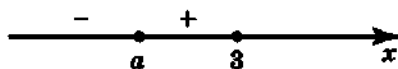


Рис. 131

сунке 131. Значит, решение системы таково: $a < x < 3$. В этом множестве только одно целое число содержится в случае, когда $a > 2$. Итак, нас устраивают такие значения параметра: $2 < a < 3$.

Пусть $a = 3$. В этом случае выражение $(a^x - a^3)(\sqrt{a} - \sqrt{x})$ обращается в нуль в точке $x = 3$, а при остальных допустимых значениях x оно отрицательно. Значит, решение системы состоит из одного числа 3, это нас вполне устраивает.

Пусть, наконец, $a > 3$. В этом случае выражение $(a^x - a^3)(\sqrt{a} - \sqrt{x})$ неотрицательно на отрезке $[3; a]$. Значит, решение системы таково: $3 \leq x \leq a$. В этом множестве только одно целое число содержится в случае, когда $a < 4$. Итак, нас устраивают такие значения параметра: $3 < a < 4$.

Ответ: $2 < a < 4$.

34.47. Известно, что уравнение $(2a + 3)x^2 + ax + 3x + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень. При каких значениях параметра a число корней этого уравнения равно числу корней уравнения

$$\frac{21 - a}{1 + 2x} = 3 + \sqrt{x - 3}?$$

Решение. Рассмотрим уравнение $\frac{21 - a}{1 + 2x} = 3 + \sqrt{x - 3}$.

Графиком функции $y = \frac{21 - a}{1 + 2x}$ является гипербола с вертикальной асимптотой $x = -\frac{1}{2}$ и горизонтальной асимптотой $y = 0$,

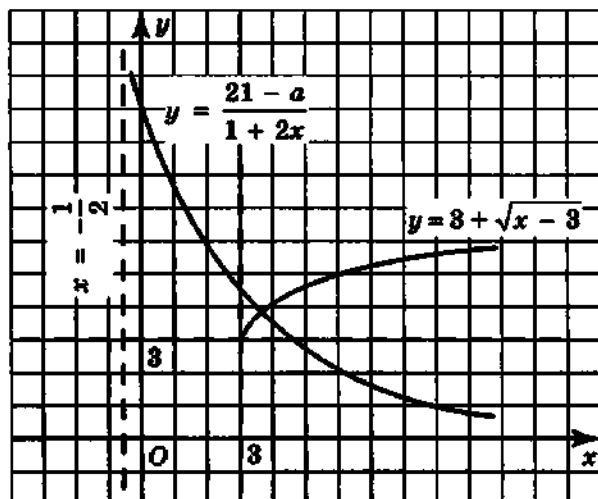


Рис. 132

а графиком функции $y = 3 + \sqrt{x - 3}$ является ветвь параболы (рис. 132). Поскольку это уравнение должно иметь корни, гипербола не может располагаться во второй и четвертой четвертях относительно своих асимптот, она располагается в первой и третьей четвертях. Это значит, что $21 - a > 0$. Заметим, что в силу разного характера монотонности гипербола и парабола могут пересекаться только в одной точке. Значит, оба уравнения, заданные в условии, должны иметь по одному корню.

Обратимся к уравнению $(2a + 3)x^2 + ax + 3x + 1 = 0$. Если $a = -1,5$, то заданное уравнение становится линейным и имеет один корень. Если $a \neq -1,5$, то заданное уравнение — квадратное, его дискриминант D равен $a^2 - 2a - 3$. Поскольку по условию нас интересует лишь случай, когда уравнение имеет один корень, то $D = 0$, т. е. либо $a = -1$, либо $a = 3$.

Итак, для параметра a есть лишь три возможности, при которых заданные уравнения могут иметь одинаковое число корней, точнее, по одному корню: $a = -1,5$, $a = -1$, $a = 3$. Рассмотрим каждый из этих случаев. Учтем главное: гипербола и ветвь параболы пересекутся в случае, когда правая ветвь гиперболы в точке $x = 3$ имеет ординату, большую, чем 3 (см. рис. 132).

Пусть $a = -1,5$. Тогда уравнение гиперболы таково: $y = \frac{22,5}{1 + 2x}$.

Если $x = 3$, то $y > 3$. Это нас устраивает.

Пусть $a = -1$. Тогда уравнение гиперболы таково: $y = \frac{22}{1 + 2x}$.

Если $x = 3$, то $y > 3$. Это нас устраивает.

Пусть $a = 3$. Тогда уравнение гиперболы таково: $y = \frac{18}{1 + 2x}$.

Если $x = 3$, то $y < 3$. Это нас не устраивает.

Ответ: $a = -1,5$; $a = -1$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Примерное планирование учебного материала	4
Глава 1. Многочлены	6
Глава 2. Степени и корни. Степенные функции	19
Глава 3. Показательная и логарифмическая функции	31
Глава 4. Первообразная и интеграл	51
Глава 5. Элементы теории вероятностей и математической статистики.....	66
Глава 6. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств.....	107